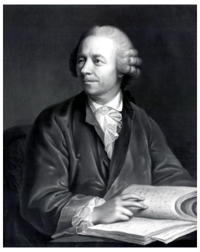


Cours Euler

Module 3

Nombres complexes

M. Schneider

2021-2022

I. Nombres complexes

1 Nombres imaginaires

Jusqu'au XVIème siècle environ, on ne considérait pas que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de *solution réelle*, mais qu'elle n'a simplement aucune solution. Mais les travaux de Cardano, Tartaglia et Bombelli - que nous retrouverons tout à l'heure - motivèrent l'invention (ou la découverte ?) d'un nombre imaginaire i ayant la propriété que $i^2 = -1$. En d'autres termes, i est une racine carrée de -1. C'est Descartes qui a baptisé ce nombre comme étant *imaginaire*, Euler qui l'a noté i et Gauss qui a introduit la terminologie "nombre complexe".

Définition 1.1. L'ensemble $\mathbb{C}$ des *nombres complexes* est l'ensemble $\{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. On appelle a la *partie réelle* et b la *partie imaginaire* de $a + bi$.

Ainsi $3i$ est un nombre complexe

Un nombre réel est aussi un nombre complexe, mais sa partie imaginaire est nulle. On peut construire des nombres complexes de la forme $1 + i$, $-\dfrac{1}{2} + 1000i$ ou encore $\sqrt{13} - \pi i$. Ce que nous remarquons tout de suite, c'est que $\mathbb{C}$ ressemble à s'y méprendre à $\mathbb{R}^2$ puisque tout nombre complexe $a + bi$ est donné par un couple de nombres réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 1.2. *Les nombres complexes forment un espace vectoriel réel. La somme est donnée par la formule* $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ *et l'action de* $\mathbb{R}$ *est donnée par la formule* $\alpha(a + bi) = \alpha a + \alpha bi$ *(où* a, b, c, d *et* α *sont des nombres réels).*

Mais l'intérêt des nombres complexes ne se trouve pas dans sa structure d'espace vectoriel ! En effet, si nous avons introduit le nombre i, c'est parce que $i^2 = -1$. Ce qui nous démange, c'est donc de multiplier les nombres complexes entre eux.

Définition 1.3. Soit $a+bi$ et $c+di$ deux nombres complexes. Le *produit* $(a+bi)(c+di)$ est donné par la formule $(ac-bd)+(ad+bc)i$.

Exemple 1.4. On peut calculer les puissances de i :

On a aussi $(1+i)^2 =$

Muni de cette multiplication, les nombres complexes forment un anneau. Nous avons choisi la seule définition qui rende la multiplication distributive par rapport à l'addition, associative et commutative. L'unité de $\mathbb{C}$ est le nombre réel 1 puisque $1 \cdot (a+bi) = a+bi$. Mais on a encore bien mieux...

Théorème 1.5. *Les nombres complexes forment un corps.*

Démonstration. Nous devons comprendre comment trouver l'inverse d'un nombre complexe non nul. Soit donc $a+bi$ un nombre complexe différent de zéro. Nous pourrions simplement chercher le nombre complexe $c+di$ qui vérifie $(a+bi)(c+di)=1$ en résolvant un système d'équations donné par la formule du produit dans $\mathbb{C}$, mais nous allons être plus astucieux.

$\square$

Exemple 1.6. L'inverse de i est
L'inverse de $1 + i$ est le nombre complexe

Définition 1.7. Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Son *conjugué complexe* est le nombre $\bar{z} = a - bi$. Il a même partie réelle, mais sa partie imaginaire est l'opposé de celle de z.

Exemple 1.8. Un exemple historique. Comment diviser 10 en deux parties dont le produit vaut 40 ? C'est une question que se pose Cardano dans le Chapitre 37 de son "Ars Magna". Cela a l'air d'être impossible puisque si on divise 10 en deux parties égales, 5 et 5, le produit vaut 25 et il manque donc 15 pour arriver à 40...

L'intérêt de ce calcul est lié à la factorisation du polynôme $x^2 + 10x + 40$. Le discriminant est négatif et les formules de Viète nous disent que les racines sont deux nombres dont la somme vaut 10 et le produit 40. Grâce aux nombres complexes on peut factoriser ce polynôme :

Pour diviser un nombre complexe par un autre, la méthode la plus rapide en général est d'amplifier la fraction par le conjugué complexe du dénominateur (afin d'éliminer les parties imaginaires au dénominateur) :

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Exemple 1.9.

$\frac{2-3i}{1+2i} =$

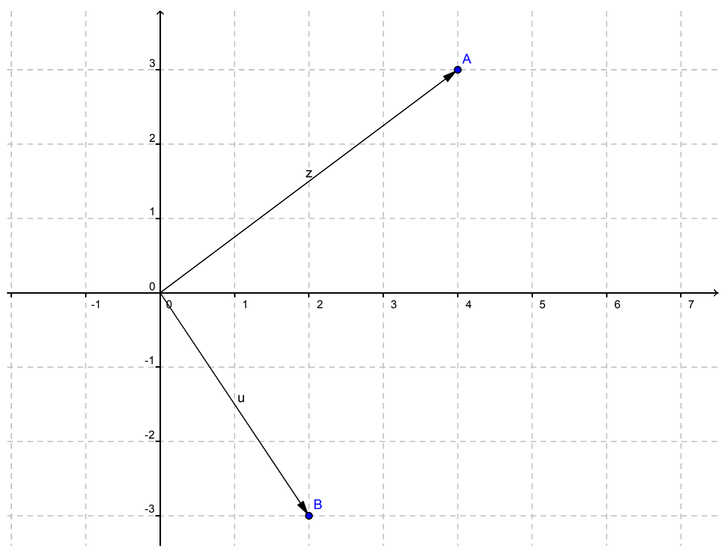
2 Représentation géométrique des nombres complexes

Nous avons vu que les nombres complexes peuvent être identifiés au plan réel $\mathbb{R}^2$ en faisant correspondre le nombre complexe $a + bi$ au point $(a; b)$ du plan. Ceci donne l'idée de représenter géométriquement les nombres complexes comme un plan. Mais puisque l'essentiel de la structure de $\mathbb{C}$ se trouve dans la multiplication, nous devons comprendre à quoi correspond géométriquement le produit. Pour cela nous introduisons deux grandeurs géométriques associées à un nombre complexe.

Définition 2.1. Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. Le *module* ou la *norme* de z est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Reconnaissez-vous ce module ?

Dans le "plan complexe", on représente donc le nombre $a + bi$ par le point $(a; b)$ ou par la flèche d'origine $(0; 0)$ et d'extrémité $(a; b)$, comme ceci :



La norme de $z = 4 + 3i$ sur cette illustration vaut 5 et celle de $u = 2 - 3i$ vaut $\sqrt{13}$. Si nous voulons tout savoir sur un nombre complexe, la norme ne suffit pas. Si par exemple nous savons que la norme de z vaut 1, ce nombre peut se trouver n'importe où sur le cercle centré en l'origine et de rayon 1. Pour connaître z, nous devons encore donner un angle.

Définition 2.2. Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. L'*argument* de z est l'angle $\arg(z)$, calculé dans le sens trigonométrique, entre le demi-axe réel positif et z.

Exemple 2.3.

— L'argument d'un nombre réel positif vaut

— Celui d'un nombre réel négatif vaut

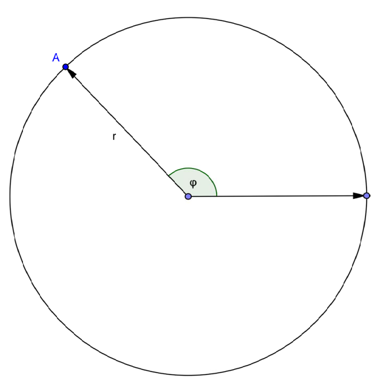
— L'argument de i vaut

— Celui de $1 + i$ vaut

On peut donc décrire un nombre complexe de deux façons. La manière cartésienne est de donner ses coordonnées dans le plan complexe. La *forme polaire* est de donner son module et son argument.

Proposition 2.4. *Soit $z = a + bi$ un nombre complexe, $r = |z|$ son module et $\phi = arg(z)$ son argument. Alors $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$.*

Démonstration.



□

Comment se traduit l'opération de produit dans le plan complexe ? Prenons deux nombres complexes $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ et $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$. Calculons le produit

$$z \cdot w = r(\cos\phi + i\sin\phi) \cdot s(\cos\psi + i\sin\psi) = rs(\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\psi + i\sin\psi),$$

où nous avons utilisé la commutativité et l'associativité du produit. Développons maintenant

$$z \cdot w = rs(\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi + (\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi)i)$$

Que reconnaissons-nous immédiatement ? La partie réelle et la partie imaginaire sont identifiables comme le cosinus et le sinus de la somme des angles grâce aux formules d'addition du sinus et du cosinus ! Par conséquent,

$$z \cdot w = rs\left(\cos(\phi + \psi) + i\sin(\phi + \psi)\right).$$

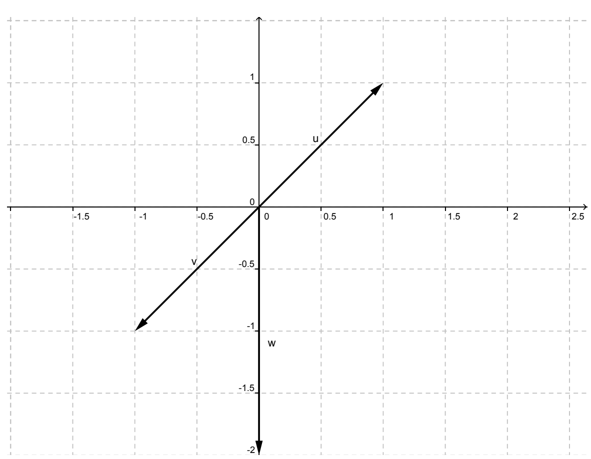
Nous venons de démontrer que le module du produit de deux nombres complexes est le produit des modules et l'argument du produit est la somme des arguments.

Théorème 2.5. *Considérons deux nombres complexes z et w. Alors*

a) $|zw| = |z||w|$;

b) $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

Exemple 2.6. Calculons le produit de $1 + i$ et $-1 - i$.



3 Résolution d'équations

L'une des raisons d'introduire les nombres complexes est d'ajouter des solutions "imaginaires" à l'équation $z^2 + 1 = 0$. Qu'en est-il des autres équations quadratiques ? Et les équations de degré supérieur ?

Théorème 3.1. *Tout polynôme de degré 2 à coefficients réels peut être décomposé*

$$ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - s),$$

où r et s sont des racines complexes.

Démonstration. C'est la formule du trinôme qui nous donne la valeur des racines r et s. En effet l'expression $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ n'a pas toujours un sens dans $\mathbb{R}$, mais lorsqu'on travaille dans $\mathbb{C}$ et que Δ négatif, il faut lire $\sqrt{\Delta} = \sqrt{|\Delta|}i$. □

Exemple 3.2. Considérons le polynôme $x^2 - 4x + 20$.

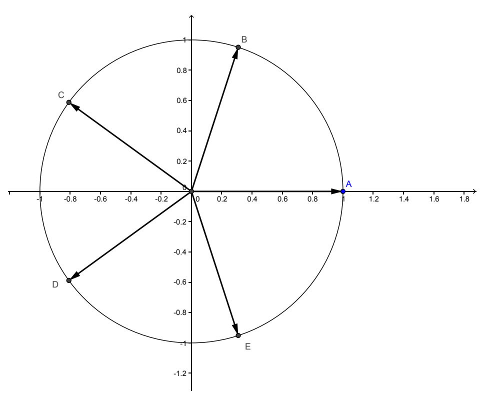
— Lorsque nous ne connaissions que les nombres naturels, l'expression $x + 1 = 0$ n'avait pas de solution. Il nous a fallu découvrir les nombres entiers relatifs pour résoudre ce problème.
— A ce moment, l'équation $2x - 3 = 0$ n'avait pas de solution et nous avons construit les nombres rationnels.
— Cela n'était toujours pas suffisant puisque l'équation $x^2 - 2 = 0$ n'a pas de solution rationnelle et nous avons décidé de travailler avec les nombres réels.

On pourrait donc penser qu'en introduisant la racine carrée de -1, nous avons trouvé un moyen de résoudre toutes les équations quadratiques. Mais qu'en est-il des autres équations ? Une propriété absolument remarquable est qu'on peut s'arrêter ici.

Théorème 3.3. Théorème fondamental de l'algèbre (Gauss, 1800).
Tout polynôme $p(x)$ de degré $n > 1$ admet au moins une racine complexe. Par conséquent, il existe des racines $r_1, \ldots, r_n$ dans $\mathbb{C}$ telles que $p(x) = a(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$.

Nous ne démontrerons pas ce théorème parce que la démonstration dépasse le cadre de ce cours.
Mais où vivent les coefficients de $p(x)$?
Ils peuvent être dans $\mathbb{R}$, mais le résultat est encore vrai pour un polynôme $p(x) \in \mathbb{C}[x]$. On dit que le corps $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos*.

Exemple 3.4. Décomposons le polynôme $x^5 - 1$.



Pour terminer, nous retrouvons nos amis mathématiciens du 16ème siècle et la raison qui les a poussés à considérer les racines de nombres négatifs.

Exemple 3.5. Cardano trouva un moyen de ramener la résolution de toute équation cubique en une équation de la forme $x^3 + bx + c = 0$. Tartaglia savait résoudre une telle équation à l'aide de sa formule (secrète) :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}.$$

Que se passe-t-il si on utilise cette formule pour résoudre $x^3 - 15x - 4 = 0$? Bombelli remarque qu'on trouve comme solution

$$\sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}},$$

et en simplifiant l'écriture :

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Il semble donc qu'il n'y a pas de solution réelle à cette équation puisque la formule de Tartaglia fait intervenir des racines de nombres réels négatifs... Mais Bombelli soupçonne que l'équation a une solution réelle. Il persévère et se rend compte que si $\sqrt{-1}$ est un nombre qui a un sens, alors

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}.$$

C'est ce qui apparaît sous la première racine cubique ! Par conséquent, la solution est $(2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$. En conclusion, il faut utiliser les nombres imaginaires même pour résoudre des équations qui ont des solutions réelles !

II. Exponentielle complexe

Pour terminer ce chapitre, nous ferons le lien entre la trigonométrie classique et la fonction exponentielle. Ce lien s'effectue en étendant l'exponentielle aux nombres complexes. Ceci nous amènera aussi à revenir sur les fonctions de trigonométrie hyperbolique et nous permettra de remarquer les analogies entre le sinus et sa version hyperbolique.

1 L'exponentielle d'un nombre complexe

Pour définir l'exponentielle d'un nombre réel x quelconque, nous avons utilisé la série de terme $\frac{x^n}{n!}$:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Nous admettons que cette somme infinie converge aussi lorsqu'on remplace le nombre réel x par un nombre complexe z arbitraire.

Définition 1.1. La fonction *exponentielle complexe* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

qu'on note aussi e^z.

Pour se rendre compte de la difficulté du calcul de l'exponentielle complexe, regardons un cas où il est aisé de calculer les puissances successives de z.

Exemple 1.2. Lorsque $z = i$, nous savons calculer les puissances i^n pour tout n. En effet,

Il se trouve que ces sommes infinies donnent environ $0.540302306 + 0.841470985 \cdot i$.

Comment pouvons-nous essayer de comprendre géométriquement cette exponentielle complexe ? Nous allons d'abord établir quelques formules analogues à celles que nous avons démontrées dans le cas réel.

Proposition 1.3. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors*

a) $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$;

b) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

Démonstration. Une fois que nous avons admis que la somme infinie qui définit l'exponentielle a un sens pour les nombres complexes, la preuve de la première formule est identique à celle effectuée dans le cadre réel : l'exponentielle d'une somme est égal au produit des exponentielles. Pour démontrer que le conjugué complexe de l'exponentielle est l'exponentielle du conjugué, il suffit d'observer que

□

Corollaire 1.4. *Pour tout nombre réel t, le nombre complexe e^{it} est de module 1.*

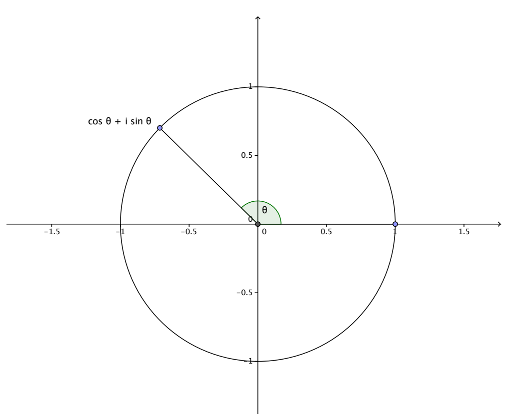
Démonstration.

$\square$

On sait donc qu'il existe un angle θ tel que $e^{it} = \cos\theta + i\sin\theta$. La partie la plus difficile de cette analyse de l'exponentielle complexe consiste à trouver de quel angle il s'agit. Pour cela il faut soit étudier le développement en séries de Taylor des fonctions réelles, soit connaître mieux la théorie des fonctions complexes. Nous allons donc tricher légèrement...

Théorème 1.5. *Pour tout nombre réel t, on a $e^{it} = \cos t + i\sin t$.*

Démonstration. Considérons la fonction $f(t) = \dfrac{e^{it}}{\cos t + i\sin t}$.



$\square$

On en déduit la célèbre formule qui utilise à la fois 0, 1 et e, i et π :

Corollaire 1.6. Formule d'Euler.
On a

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Démonstration. Nous savons que $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$. $\square$

2 Le logarithme complexe

La compréhension de l'exponentielle complexe amène aussi des simplifications de notation et de calcul. En effet, un nombre complexe de module r et d'argument t peut s'écrire $z = re^{it}$. D'autre part, si $z = a + bi$, alors $e^z = e^a \cdot e^{bi}$. Puisque les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π, on décide de restreindre le domaine de définition de l'exponentielle à $\mathbb{R} \times [0, 2\pi[$.
En effet, si $z = a + bi$ et $w = a + (b + 2k\pi)i$, alors

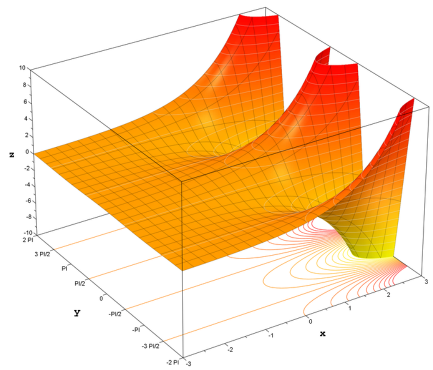
Soit U la bande horizontale du plan complexe de largeur 2π définie par

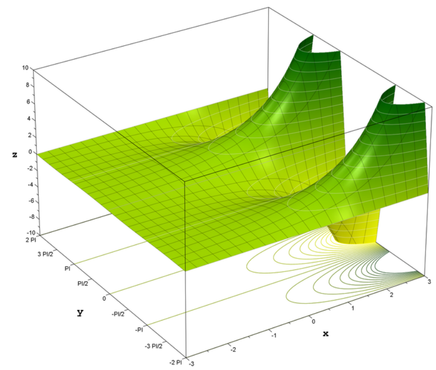
$$U = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R}, 0 \leq b < 2\pi\}.$$

Théorème 2.1. *La fonction exponentielle* $\exp : U \to \mathbb{C}^*$ *est une bijection.*

Démonstration. Il faut commencer par observer que e^z n'est jamais nul. Il s'agit en effet d'un nombre complexe de module $e^{Re(z)}$, qui n'est jamais nul. Pour voir que l'exponentielle complexe est injective, il faut montrer que si $e^z = e^w$ pour $z = a + bi$ et $w = c + di$ dans U, alors $z = w$. Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même module et même argument. Leur module vaut respectivement e^a et e^c. Comme l'exponentielle réelle est injective, on en en déduit que $a = c$. Leur argument vaut respectivement b et d, deux nombres compris entre 0 et 2π qui doivent donc être égaux.
Montrons enfin la surjectivité. Soit v un nombre complexe non nul. Son module est r et son argument θ est choisi entre 0 et 2π. Alors $z = \ln r + i\theta$ est un nombre complexe dans U tel que $e^z = v$. $\square$

Voici les graphes des fonctions réelles d'une variable complexe qui associent respectivement au nombre complexe z la partie réelle et la partie imaginaire de e^z.





On peut définir par conséquent le logarithme complexe comme étant la fonction réciproque de l'exponentielle complexe restreinte à U. En d'autres termes, $\ln(z) = w$ si $w \in U$ est le seul nombre complexe d'argument compris entre 0 et 2π tel que $e^w = z$.

Exemple 2.2. Le logarithme complexe de $2i$ est

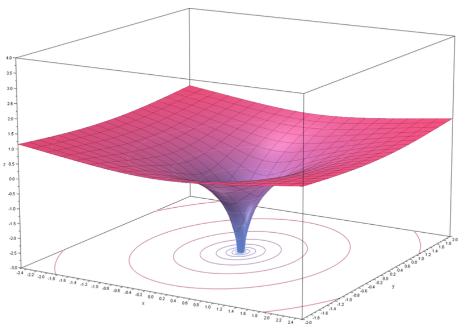
Toutefois, ce qu'on fait usuellement ne coïncide que partiellement avec la définition ci-dessus. En effet, la définition que nous avons donnée n'est pas une fonction continue ! Considérons des points proches de 1 de part et d'autre de l'axe réel.

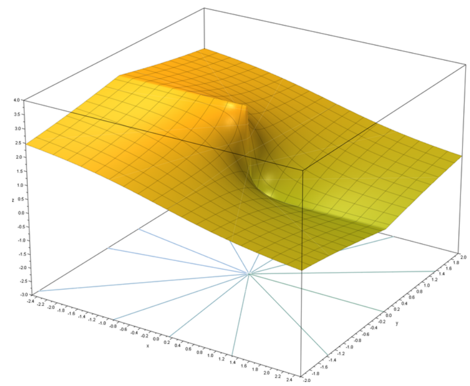
Remarque 2.3. On choisit de définir la *détermination principale du logarithme complexe* sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$. On écrit tout nombre complexe z qui n'est pas un nombre réel négatif ou nul de la forme $re^{i\theta}$ où $-\pi < \theta < \pi$. On pose alors

$$\ln(z) = \ln r + i\theta.$$

En éliminant les nombres réels négatifs, on supprime l'argument $\pi + 2k\pi$. Le problème de discontinuité mentionné ci-dessus est éliminé, tout en nous autorisant malgré tout à définir $\ln(1) = 0$, le contraire eût été triste...

Voici les graphes des fonctions parties réelles et parties imaginaires du logarithme complexe :





Attention ! Des propriétés très caractéristiques du logarithme népérien ne sont plus vraies dans le cadre complexe !
Par exemple,

3 Trigonométrie classique et hyperbolique

Nous nous souvenons que la fonction exponentielle nous a permis de définir les fonctions cosinus et sinus hyperboliques :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Nous avons aussi vu (ou plutôt admis) que $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Ce lien entre l'exponentielle complexe et la trigonométrie du cercle classique va nous permettre d'exprimer le cosinus et le sinus de manière analogue au cas hyperbolique, en remplaçant simplement l'exponentielle réelle par l'exponentielle complexe.

Proposition 3.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

Démonstration. Nous traiterons simplement le cas du sinus.

$\square$

4 Les similitudes du plan

Identifions le plan $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ (le couple (a, b) correspond à $a + bi$). Notre compréhension de l'addition et de la multiplication complexe nous permet d'affirmer que :

1. Additionner un nombre complexe $w = a + bi$ correspond à effectuer

2. Multiplier par un nombre complexe de la forme $e^{i\theta}$ correspond à effectuer

3. Multiplier par un nombre réel $R > 0$ correspond à effectuer

4. La conjugaison complexe correspond à effectuer

En mettant toutes ces observations ensemble nous pouvons en fait décrire *toutes* les similitudes du plan à l'aide des opérations sur les nombres complexes :

Théorème 4.1. *Soit $c = a + bi$ un nombre complexe et R un nombre réel positif.*

a) Toute translation dans $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto z + c$.

b) Toute rotation dans $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto e^{i\theta} \cdot (z - c) + c$. Ici c est le centre de la rotation et θ son angle.

c) *Toute homothétie dans $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto R(z-c)+c$. Ici R est le rapport de l'homothétie et c son centre.*

d) *Toute symétrie axiale dans $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto e^{2i\theta} \cdot \overline{z-c} + c$. Ici l'axe passe par c et son angle avec l'axe réel est θ.*

Démonstration. Regardons par exemple le cas des rotations. Pour mieux comprendre qui est l'image de z, appelons τ la translation par $-c$, c'est-à-dire $\tau(z) = z - c$. Ainsi τ^{-1} est

$\square$

Exemple 4.2. Considérons la transformation du plan complexe donnée par $z \mapsto -2iz - 1 + 2i$. Il s'agit de la composition de

Comment la décrire ? Commençons par chercher ses points fixes.

On peut donc écrire l'image de z de la façon suivante :

Pour conclure, voici la forme générale de toute similitude du plan complexe. L'écriture est simplifiée, mais souvent, comme nous venons de le voir dans l'exemple précédent, il vaut mieux modifier cette écriture pour comprendre géométriquement de quelle transformation on parle.

Corollaire 4.3. *Toute similitude du plan s'écrit de la forme* $z \mapsto w \cdot z + c$ *ou* $z \mapsto w \cdot \overline{z} + c$*, avec* $w \neq 0$ *et* c *deux nombres complexes.*