Série 11

Pour le 30 novembre 2022

Remarque : Dans cette série, $\mathrm{Im}(a+ib)=b$ représente la partie imaginaire d'un nombre complexe et $\mathrm{Re}(a+ib)=a$ représente la partie réelle d'un nombre complexe.

Exercice 1

Mets les nombres complexes suivants sous forme cartésienne.

a) $(4-3i)+(-1-5i)-(4+2i)$

b) $2(5-2i)+3(7-i)-2(4-3i)$

c) $(2+5i)(3-9i)$

d) $(4+3i)(4-3i)$

e) $(3-2i)^2$

f) $(1+i)^4$

g) $\dfrac{1}{i}$

h) $\dfrac{1}{3+4i}$

i) $\dfrac{1+i}{1-i}$

j) $\dfrac{2+4i}{3+5i}$

k) $\left(\dfrac{63+16i}{4+3i}\right)^2$

l) i^n pour $n\in\mathbb{Z}$

m) $\dfrac{a+bi}{c+di}$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

Exercice 2

Représente les points suivants dans le plan complexe :

$$z_A=3-i \qquad z_B=-2+3i \qquad z_C=z_A+z_B \qquad z_D=z_A-z_B$$

$$z_E=\frac{z_A+\overline{z_A}}{2} \qquad z_F=\frac{z_A-\overline{z_A}}{2} \qquad z_G=-z_A \qquad z_H=-\overline{z_A}$$

Exercice 3

Soient $z, w \in \mathbb{C}$. Montre que

a) $\bar{\bar{z}} = z$

b) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

c) $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$

d) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

e) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$ si $w \neq 0$

f) $|zw| = |z||w|$

g) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$ si $w \neq 0$

h) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ si $z \neq 0$

Exercice 4

Mets les nombres suivants sous forme trigonométrique :

a) 1

b) i

c) -5

d) $-1+i$

e) $1+\sqrt{3}i$

f) $3+4i$

g) $12+5i$

Exercice 5

Calcule les nombres complexes suivants :

a) $(1+\sqrt{3}i)^7$

b) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$

c) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{7}$

Exercice 6

Détermine les formes cartésiennes et trigonométriques des nombres $z \in \mathbb{C}$ qui satisfont respectivement les équations

$$z^3 = 1+i, \qquad z^8 = 1 \qquad \text{et} \qquad z^4 = -16,$$

et représente-les dans le plan complexe.

Exercice 7

Résoud dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $2z - 3 + i = 0$

b) $(1+2i)z = (5-i)z + 7 + 26i$

c) $8z + 5\bar{z} = 4 + 3i$

d) $2\mathrm{Im}(\bar{z}+1) + 2i\mathrm{Re}(-z+2) = -1 - 12i$

Exercice 8

Résoud dans $\mathbb{C}$ les équations :

a) $z^2 = 25$

b) $z^2 = -4$

c) $2z^2 + 10z + 17 = 0$

d) $z^2 + 3z - 5 = 0$

e) $z^2 - 3(1+i)z + 6 + 7i = 0$

f) $(1+2i)z^2 - (7+4i)z + 5 - 5i = 0$

Exercice 9

Décompose dans $\mathbb{R}[z]$ et $\mathbb{C}[z]$ les polynômes suivants :

a) $z^4 - 1$

b) $z^4 + 1$

c) $z^3 + 1$

d) $z^6 - 1$

e) $z^6 + 9z^4 + 27z^2 + 27$

Exercice 10

Montre que si z est solution de l'équation réelle $ax^2 + bx + c = 0$, alors $\bar{z}$ aussi.

Exercice 11

Résoud dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$\begin{cases} (2+i)z + (2-i)w &= 7 - 4i \\ (1+i)z - iw &= 2 + i \end{cases}$$

Exercice 12

Donne les sous-ensembles des $z \in \mathbb{C}$ déterminés par les conditions suivantes :

a) $\bar{z} = z$

b) $\bar{z} = -z$

c) $|z + i| \leq 1$

d) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = 1$

e) $|z - 1| > |z - 2|$

f) $\mathrm{Im}(az) = b$ pour $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{R}$

Exercices théoriques

Exercice 13

Formule de Moivre.
Montre que

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n \;=\; \cos(n\theta) + i\sin(n\theta), \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 14

Inégalité du triangle.
Montre que

$$|v + w| \leq |v| + |w| \qquad \text{pour tout } v, w \in \mathbb{C}.$$

Déduis en que

$$|v + w| \geq ||v| - |w|| \qquad \text{et} \qquad |v - w| \geq ||v| - |w|| \qquad \text{pour tout } v, w \in \mathbb{C}.$$

Indication : Pour montrer la première inégalité, tu peux montrer que $v\overline{w} + \overline{v}w = 2\mathrm{Re}(v\overline{w})$. Ensuite, il faut montrer que $|\mathrm{Re}(v\overline{w})| \leq |v| \cdot |w|$. Pour cela, tu peux développer $0 \leq |\lambda v + w|^2$ et utiliser que le discriminant doit être plus petit ou égal à 0.

Exercice 15

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montre que

a) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

b) $z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$

c) $z\bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = |z|^2$

d) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$

e) $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$