Série 12

Pour le 7 décembre 2022

Exercice 1

Mets les nombres complexes suivants sous forme cartésienne :

$$e^{\frac{3\pi i}{2}}, \quad \sqrt{2}ie^{\frac{\pi i}{2}}, \quad \frac{2e^{\frac{\pi i}{3}}}{1+i}, \quad \frac{i}{e^{\frac{\pi i}{4}}}$$

Exercice 2

Calcule l'exponentielle complexe e^z lorsque $z = 1 + i$, $z = e^i$, $z = e^{\pi i}$ et $z = -2i$. Dans les quatre cas, donne la forme cartésienne et indique quel est le module et l'argument.

Exercice 3

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) L'exponentielle complexe $z \mapsto e^z$ coïncide avec l'exponentielle réelle lorsque z est un nombre réel.

b) L'exponentielle complexe est injective.

c) L'exponentielle complexe est surjective sur $\mathbb{C}^*$.

d) Les seules similitudes du plan qui ne sont pas des isométries sont les homothéties.

e) Les seules isométries du plan indirectes (qui ne préservent pas l'orientation) sont les symétries axiales.

Exercice 4

Calcule le logarithme complexe (la détermination principale) lorsque $z = \pi$, $z = \pi i$, $z = e^{\pi i}$, $z = -\pi i$ et $z = i + 1$.

Exercice 5

Ecris les équations dans $\mathbb{C}$ des similitudes suivantes :

a) translation par $3-2i$;

b) rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$;

c) rotation de centre $3-i$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$;

d) symétrie dont l'axe est la droite des réels ;

e) symétrie dont l'axe a pour équation $2x-y+4=0$;

f) homothétie de centre 0 et de rapport 2, puis rotation d'angle π ;

g) homothétie de centre $3-2i$ et de rapport 3.

Exercice 6

Caractériser géométriquement les similitudes f d'équation :

a) $f(z) = -\overline{z}$;

b) $f(z) = z+3-2i$;

c) $f(z) = i\overline{z}+3$;

d) $f(z) = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot z$;

e) $f(z) = (1+i)z+1-i$;

f) $f(z) = (1+\sqrt{3}i)\overline{z}+\sqrt{3}-1$.

Exercice 7

On donne les six points $A=(-2;-3), B=(2;-1), C=(4;1), A'=(0;3), B'=(7;4)$ et $C'=(11;6)$ formant deux triangles ΔABC et $\Delta A'B'C'$ semblables. Détermine l'équation de la similitude envoyant le triangle ΔABC sur le triangle $\Delta A'B'C'$ et caractérise-la géométriquement.

Exercice 8

Montre que toute homothétie du plan est de la forme $z \mapsto R(z-c)+c$, où R est un nombre réel non nul et c est un nombre complexe arbitraire.

Exercice 9

Décris l'image par la détermination principale du logarithme complexe du cercle de rayon $r>0$ centré en l'origine (et privé du point $-r$).