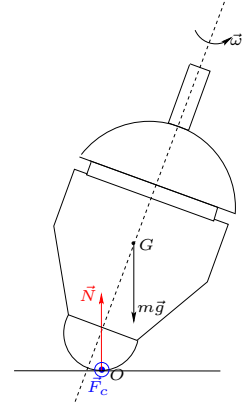


Série 10 : Gyroscopes et rotation des solides

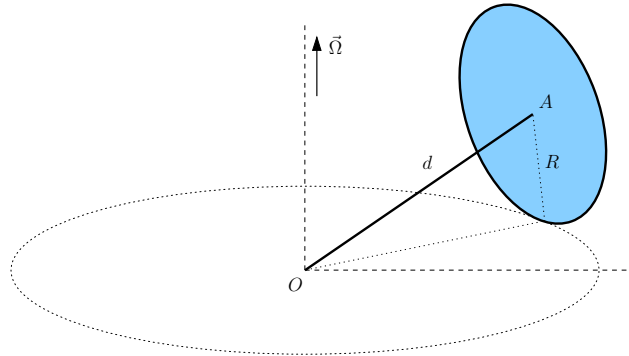
Questions conceptuelles

- a) Un avion à hélice (l'hélice, sur le nez de l'avion, a un vecteur moment cinétique dans le sens du mouvement de l'avion) vole horizontalement et s'apprête à effectuer un virage à gauche. Si le pilote ne compense pas, l'avion aura-t-il tendance à monter ou à descendre ? Expliquez votre réponse en terme de changement du moment cinétique.
- b) Une toupie en forme de cône de pin est munie d'une rainure dans laquelle une ficelle est enroulée. La ficelle est attachée à un bâton sur lequel on tire pour lancer la toupie en rotation rapide sur le sol. Lorsque la toupie glisse sur le sol et que son axe est incliné, montrer à l'aide du théorème du moment cinétique appliqué au centre de masse de la toupie que :
- la force de soutien \vec{N} du sol sur la toupie a pour effet de faire précesser la toupie.
 - la force de frottement cinétique \vec{F}_c du sol sur la toupie a pour effet de redresser la toupie à la position verticale, dite "dormante".



1 Roue sur axe incliné

Une roue de rayon R est attachée en son centre A à une extrémité d'un axe rigide de longueur d , perpendiculaire au plan de la roue. L'autre extrémité de l'axe est fixée en un point O du sol, supposé horizontal (voir dessin). La roue roule sans glissement sur le sol, entraînée par l'axe, qui à un mouvement de rotation caractérisé par un vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}(t)$ dirigé verticalement vers le haut.



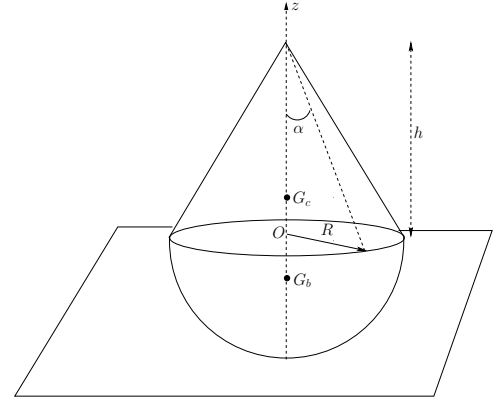
- En utilisant la formule qui lie les vitesses vectorielles des points d'un solide indéformable, déterminer la vitesse angulaire $\vec{\omega}(t)$ de rotation propre de la roue autour de son axe.
- Calculer la vitesse angulaire de roulement et la vitesse angulaire de pivotement de la roue, c'est-à-dire les composantes horizontale et verticale de sa vitesse angulaire totale.

2 Équilibre stable

Un solide est constitué d'un cône tronqué droit homogène de base circulaire de rayon R disposé sur une demi-boule homogène de rayon R et de même masse volumique ρ , comme indiqué sur la figure. Le cône s'ouvre vers le bas avec un demi-angle au sommet α .

Montrer que le solide sera en équilibre stable sur le plan horizontal si, et seulement si, $\alpha > 30^\circ$.

Indication : Avec l'origine O à la jonction entre les 2 solides sur l'axe z , le centre de masse du cône de volume $\frac{1}{3}\pi h R^2$ se trouve à la hauteur $z_{G_c} = \frac{1}{4}h$ et le centre de masse de la demi-boule de volume $\frac{2}{3}\pi R^3$ se trouve à $z_{G_b} = -\frac{3}{8}R$.



3 Piston et Bielle

Le système est modélisé par une roue tournant à vitesse angulaire $\dot{\theta}$ fixe et d'une barre de longueur L dont une extrémité est fixée à la roue et l'autre peut glisser sur un axe passant par le centre de la roue.

- Déterminer l'expression de la vitesse \mathbf{V}_P d'un point quelconque P de la barre en coordonnées cartésiennes en fonction des angles θ et α .
- Montrer que l'on peut écrire la vitesse \mathbf{V}_P comme

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_A + \dot{\alpha} \times \mathbf{AP} .$$

- Montrer que l'on peut écrire la vitesse \mathbf{V}_P comme

$$\mathbf{V}_P = \dot{\alpha} \times \mathbf{IP} ,$$

et trouver les coordonnées cartésiennes du point I .

