Corrigé 10 : gyroscopes et rotation des solides

1. **Moment de force : bras de levier**

   (a) On exploite la définition du moment de force par rapport à A :

   $$\vec{M}_A = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}\,.$$

   Selon $\hat{e}_z$, la norme du moment de force s'écrit

   $$M_A = RF\sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = RF\cos\alpha\,,$$

   où $F = ||\vec{F}||$.

   - Pour $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, la rotation induite est de sens trigonométrique et le moment $\vec{M}_A$ est **sortant** :
   $$\odot\,\vec{M}_A\,.$$
   - Pour $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, la rotation induite est dans le sens des aiguilles d'une montre et le moment $\vec{M}_A$ est **entrant** :
   $$\otimes\,\vec{M}_A\,.$$

   (b) Par le théorème du moment cinétique, l'accélération angulaire est proportionnelle au moment de force de $\vec{F}$ par rapport à A :

   $$\dot{\vec{L}}_A = \vec{M}_A\,.$$

   Selon $\hat{e}_z$, $\dot{L}_A = M_A = RF\cos\alpha$.
   Comme la force est fixée, la norme $|M_A|$ est maximale lorsque le bras de levier est maximal. C'est le cas

   $$\text{pour}\quad \alpha = 0 \quad\text{ou}\quad \alpha = \pi$$

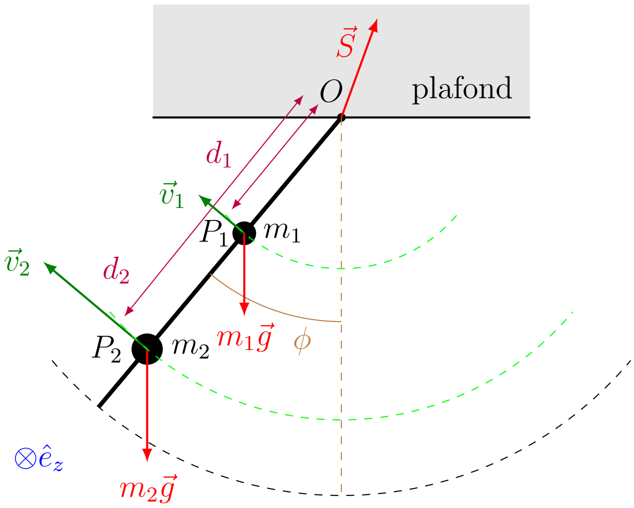
   (la force $\vec{F}$ est alors tangente à la roue).

   (c) Comme la force est fixée, la norme $|M_A|$ est minimale pour

   $$\text{pour}\quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad\text{ou}\quad \alpha = \frac{3\pi}{2}$$

   (la force $\vec{F}$ est alors normale à la roue).

2. **Théorème du moment cinétique**
   Si l'on entend exploiter le théorème de l'énergie cinétique, il convient de déterminer la somme des moments des forces s'exerçant sur l'objet "pendule" ("tige + boule m_1 + boule m_2"), ainsi que le moment cinétique qui lui est associé.
   L'objet "pendule" est soumis à trois forces extérieures : les poids $m_1\vec{g}$ et $m_2\vec{g}$, ainsi qu'une force de soutien $\vec{S}$ au niveau du point d'attache O :



Le moment de la force $\vec{S}$ par rapport au point O est nul :

$$\vec{M}_O(\vec{S}) = \overrightarrow{OO} \wedge \vec{S} = \vec{0}\,.$$

Dans un repère cylindrique $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$, les moments dus aux poids s'écrivent quant à eux, toujours par rapport au point O,

$$\begin{aligned}\vec{M}_O(m_1\vec{g}) &= \overrightarrow{OP_1} \wedge m_1\vec{g} = -m_1 g d_1 \sin\phi\,\hat{e}_z \\ \vec{M}_O(m_2\vec{g}) &= \overrightarrow{OP_2} \wedge m_2\vec{g} = -m_2 g d_2 \sin\phi\,\hat{e}_z\,.\end{aligned}$$

Remarquons que la somme de ces deux moments est bien égale au moment du poids total de l'objet "pendule" appliqué au centre de masse G :

$$\begin{aligned}\vec{M}_O\big((m_1+m_2)\vec{g}\big) &= \overrightarrow{OG} \wedge (m_1+m_2)\vec{g} \\ &= \frac{d_1 m_1 + d_2 m_2}{m_1+m_2}(m_1+m_2) g \sin\phi\,\hat{e}_z \\ &= (d_1 m_1 + d_2 m_2) g \sin\phi\,\hat{e}_z\,.\end{aligned}$$

D'autre part, le moment cinétique du pendule par rapport au point O a pour expression

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \vec{L}_{O,m_1} + \vec{L}_{O,m_2} = \overrightarrow{OP_1} \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{OP_2} \wedge m_2\vec{v}_2 \\ &= d_1 m_1 v_1\,\hat{e}_z + d_2 m_2 v_2\,\hat{e}_z = d_1 m_1 d_1 \dot{\phi}\,\hat{e}_x + d_2 m_2 d_2 \dot{\phi}\,\hat{e}_z \\ &= \left(m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2\right)\dot{\phi}\,\hat{e}_z\,.\end{aligned}$$

On applique alors le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

$$\Rightarrow \quad \left(m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2\right)\ddot{\phi}\,\hat{e}_z = -(m_1 d_1 + m_2 d_2) g \sin\phi\,\hat{e}_z\,.$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\phi} + \omega_0^2 \sin\phi = 0\,,$$

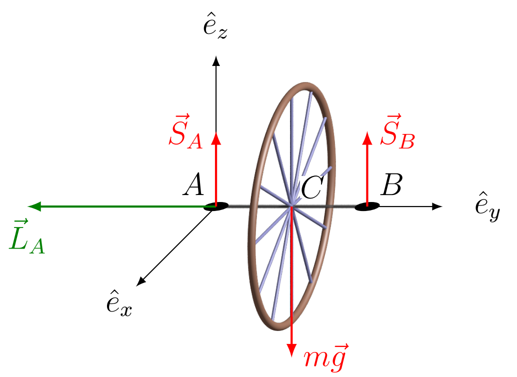
avec

$$\omega_0^2 = \frac{(m_1 d_1 + m_2 d_2) g}{(m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)}\,.$$

On reconnaît l'équation différentielle donnant l'évolution du pendule simple. Seule l'expression de la pulsation ω_0 a changé.

3. **Roue soutenue par l'un des bouts de son axe**

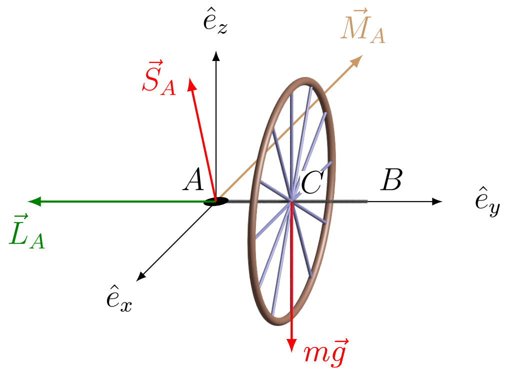
Initialement, l'objet formé de la roue et de son axe, de masse m, subit son poids et le soutien en A et B. La roue est à l'équilibre : la somme des forces et la somme des moments de force, en particulier par rapport à A, sont nulles.



$$\vec{F} = \vec{S}_A + \vec{S}_B + m\vec{g} = \vec{0}\,,$$

$$\vec{M}_A = \underbrace{\overrightarrow{AA}}_{\vec{0}} \wedge \vec{S}_A + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{S}_B + \overrightarrow{AC} \wedge m\vec{g} = \vec{0}\,.$$

En absence de soutien en B, l'équilibre est rompu :



$$\vec{M}_A = \overrightarrow{AC} \wedge m\vec{g} \neq \vec{0}\,.$$

Le moment du poids par rapport à A est horizontal, car normal au plan vertical défini par A, C et $m\vec{g}$. Selon le théorème du moment cinétique

$$\vec{M}_A = \dot{\vec{L}}_A\,,$$

le moment cinétique $\vec{L}_A$ est modifié horizontalement et reste donc à tout instant horizontal.

L'axe de la roue pivote autour de l'axe vertical passant par A : c'est un mouvement de précession. A cela vient s'ajouter une inclinaison de l'axe de la roue par rapport à l'horizontale, inclinaison qui dépend de la vitesse angulaire de rotation de la roue : plus la vitesse de rotation de la roue est grande, plus l'inclinaison est faible. A ce mouvement se superpose enfin une oscillation de cette inclinaison, appelée nutation.
Lien : https://youtu.be/GEKtnlZfksI