NB: Nous proposons de brèves justifications aux réponses, bien que ce ne soit pas demandé. Ce ne sont pas des exemples de rédaction "idéale" pour les questions ouvertes.

Question 1 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}\,.$$

Alors :

- [ ] $\liminf_{n\to+\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
- [x] $\liminf_{n\to+\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 0$
- [ ] $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{3}-\sqrt{2}$
- [ ] $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 0$

On a $a_n = \dfrac{n+(-1)^n - n}{\sqrt{n+(-1)^n}+\sqrt{n}} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}+\sqrt{n}}$ donc $|a_n| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Donc par le Thm. des gendarmes pour les suites, $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Ceci implique $\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Question 2 : Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 3$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + 2$. Alors:

- [ ] $\lim_{n\to+\infty} x_n = 3$
- [ ] $\lim_{n\to+\infty} x_n = 2$
- [ ] $(x_n)_{n\geq 0}$ diverge
- [x] $\lim_{n\to+\infty} x_n = 8$

Il s'agit d'une suite définie par récurrence linéaire (=affine). Comme $q = \frac{3}{4}$ satisfait $|\frac{3}{4}| < 1$, la suite converge. Sa limite ℓ satisfait:

$$\ell = \frac{3}{4}\ell + 2 \iff \frac{1}{4}\ell = 2 \iff \ell = 8.$$

Question 3 : Soit la série avec paramètre $b \in \mathbb{R}$ définie par :

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2b + \frac{1}{k}\right)^k$$

Alors s converge si et seulement si :

- [ ] $b \leq \frac{1}{2}$
- [ ] $b \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- [ ] $b < \frac{1}{2}$
- [x] $b \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

Regardons le critère de Cauchy: le terme général est $a_k = \left(2b + \frac{1}{k}\right)^k$.

On a $\lim_{k\to+\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k\to+\infty} \left|2b + \frac{1}{k}\right| = 2|b|$. Donc la série $\begin{cases} \text{converge si } |b| < \frac{1}{2} \\ \text{diverge si } |b| > \frac{1}{2} \end{cases}$

- Pour $b = \frac{1}{2}$, $a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \geq 1$
- Pour $b = -\frac{1}{2}$, $a_k = (-1)^k\left(1-\frac{1}{k}\right)^k$ or $\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^k = \boxed{\frac{1}{e}}$

donc dans les deux cas (a_n) ne converge pas vers 0 donc s diverge.

Cette étape pouvait être sautée vu la liste des réponses proposées.

Question 4 : La limite $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{2n-\sqrt{3n}}}}$

- [ ] existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$
- [ ] existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{6}}$
- [x] existe et vaut 1
- [ ] n'existe pas

Soit $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{2n-\sqrt{3n}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{n}-\sqrt{\frac{3}{n^3}}}}} \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

La fonction $\left|\begin{matrix}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x}\end{matrix}\right.$ est continue (fonction élémentaire). Donc

- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{3}{n^3}} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^3}} = \sqrt{0} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{n} - \sqrt{\frac{3}{n^3}}} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{n}-\sqrt{\frac{3}{n^3}}}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 1$

Question 5 : Soit $z = \frac{2\,\mathrm{i}^9 - 4\,\mathrm{i}^{15}}{1-\mathrm{i}}$. Alors:

- [x] $z^6 = 8 \cdot 3^6\,\mathrm{i}$
- [ ] $z^6 = 8 \cdot 3^6(1+\mathrm{i})$
- [ ] $z^6 = 8 \cdot 3^6$
- [ ] $z^6 = -8 \cdot 3^6\,\mathrm{i}$

On a $i^9 = i((i)^2)^4 = i(-1)^4 = i$ et $i^{15} = i((i)^2)^7 = i(-1)^7 = -i$

Donc $z = \frac{2i+4i}{1-i} = \frac{6i\cdot(1+i)}{2} = 3(i-1) = 3\cdot\sqrt{2}\cdot e^{3\pi i/4}$

Donc $z^6 = 2^3 \cdot 3^6 \cdot e^{3\times 6 i\pi/4} = 8\cdot 3^6 e^{18 i\pi/4} = 8\cdot 3^6 e^{i\pi/2} = 8\cdot 3^6 \cdot i$

Question 6 : Dans les nombres complexes une solution de l'équation $z^4 + (4+3\mathrm{i})^2 = 0$ est :

- [x] $z = 2 - \mathrm{i}$
- [ ] $z = 1 - 2\mathrm{i}$
- [ ] $z = 2 + \mathrm{i}$
- [ ] $z = (4+3\mathrm{i})/2$

Première approche : essayer les 4 solutions

Meilleure approche :

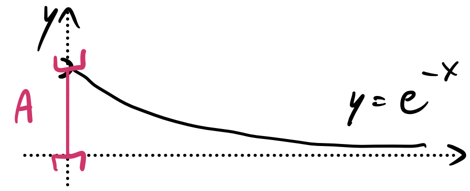
Posons $z^2 = a$. On a $a^2 = -(4+3i)^2 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a = i(4+3i) = -3+4i \\ \text{ou} \\ a = -i(4+3i) = 3-4i \end{matrix}\right.$

Cherchons $z = x+iy$: $z^2 = a \Leftrightarrow x^2-y^2+2iyx = -3+4i$ ou $x^2-y^2+2iyx = 3-4i$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2-y^2=-3 \\ xy = 2 \end{matrix}\right.$ ou $\left\{\begin{matrix} x^2-y^2=3 \\ xy = -2 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}\right.$ ou $\left\{\begin{matrix} x=2 \\ y=-1 \end{matrix}\right.$

Question 7 : Soit $A = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } y = e^{-x}\}$. Alors

- [ ] Sup $A = \mathrm{e}$
- [x] Sup $A = 1$
- [ ] Inf $A = 1$
- [ ] A n'est pas majoré



$f : \begin{vmatrix} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^{-x} \end{vmatrix}$ est décroissante. Donc $\sup A = \lim_{x \to 0+} e^{-x} = e^0 = 1$.

(en fait $A =]0,1[$)

Question 8 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $a_n = \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n)!}$. Alors la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est:

- [x] absolument convergente
- [ ] convergente mais pas absolument convergente
- [ ] divergente car $|a_n| \to +\infty$
- [ ] divergente car $|a_n| \to 1$

Regardons le critère de d'Alembert : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-2)^{n+1}}{(-2)^n} \cdot \left(\frac{(n+1)!}{(n!)}\right)^2 \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!}\right|$

$$= \frac{2 \cdot (n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2}{4n^2} \cdot \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{(1+\frac{1}{2n})(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{2}$.

Donc par le critère de d'Alembert, la série est absolument convergente.

Question 9 : Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$, il existe une infinité de nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(\omega z) = 0$.

- [x] VRAI
- [ ] FAUX

On écrit w sous forme polaire : $w = r e^{i\varphi}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si l'on multiplie par $z_n = 2^n e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)}$ on a $w z_n = 2^n \cdot r \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = i 2^n \cdot r$

Donc $\mathrm{Re}(w \cdot z_n) = 0$. Par ailleurs $|z_n| = 2^n$ donc les z_n sont bien tous distincts pour $n \in \mathbb{N}$. (d'autres exemples sont bien sûr possibles).

Question 10 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Alors $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Avec $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$, on a que la suite $n \cdot a_n = (-1)^n$ diverge
Mais $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (critère de Leibniz pour les séries alternées).

Question 11 : Il existe une fonction bijective et continue $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Vrai, par exemple $x \mapsto \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ ou encore $x \mapsto \tan\left(\frac{-\pi x}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Question 12 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

☐ VRAI ☒ FAUX

Faux, par exemple $a_n = \frac{1}{n}$ satisfait $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ mais $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Question 13 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide, et soit $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Si A est majoré, alors B est majoré.

☐ VRAI ☒ FAUX

Faux, par exemple : si $A =]-\infty, 0]$ alors $B = [0, +\infty[$.
Ici A est majoré mais pas B.