

Analyse I – Série 10

Echauffement. (Dérivée de la valeur absolue)

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x| + e^x$. Calculer f' et tracer les graphes de f et f' .

Exercice 1. (Continuité de la dérivée)

Calculer la dérivée de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

en $x = 0$. Est-ce que la fonction f' est continue en $x = 0$?

Exercice 2. (Dérivée de la fonction réciproque)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction injective sur l'intervalle $I \subset D(f)$. Etudier la dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1} et calculer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = \sin(x)$ sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [0, \pi]$

c) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

d) $f(x) = e^x$ sur \mathbb{R}

e) $f(x) = e^{-x}$ sur \mathbb{R}

f) $f(x) = a^x$ avec $a = \frac{1}{2}$ sur \mathbb{R}

g) $f(x) = \operatorname{sh}(x)$ sur \mathbb{R}

h) $f(x) = \operatorname{ch}(x)$ sur $I = [0, \infty[$

i) $f(x) = \operatorname{th}(x)$ sur \mathbb{R}

j) $f(x) = \operatorname{coth}(x)$ sur \mathbb{R}^*

Rappel : sh (resp. ch) est une notation pour désigner la fonction sinus (resp. cosinus) hyperbolique. La fonction cotangente hyperbolique coth est définie par $\operatorname{coth} := 1/\operatorname{th} = \operatorname{ch}/\operatorname{sh}$.

Exercice 3. (Théorème des accroissements finis)

Montrer en utilisant les corollaires du théorème des accroissements finis que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 \geq 0.$$

Exercice 4. (Règle de Bernoulli-l'Hospital)

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{Log}(x-1)}{x-2}$

b) (*) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{th}(x) - 1 \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin(x) \right)^{1/x}$

Pour (b) on pourra appliquer BH plusieurs fois jusqu'à ce que la limite ne soit pas indéterminée.

Exercice 5. (Application de la Règle de Bernoulli-l'Hospital)

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{1/n} - 1 \right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$

Indication : on pourra se ramener à l'étude de fonctions, en utilisant le fait que si $a_n = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ si cette dernière limite existe.

Exercice 6. (QCM : Révisions)

- a) Si $f : X \rightarrow Y$ est croissante et bijective, alors $f^{-1} : Y \rightarrow X$ est
- décroissante
 - croissante
 - ni croissante ni décroissante
 - bornée
- b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire et bijective, alors f^{-1} est
- impaire
 - paire
 - ni paire ni impaire
 - périodique
- c) Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction bijective et bornée sur X , alors $f^{-1} : Y \rightarrow X$ est
- bornée sur Y
 - croissante
 - paire
 - aucun des autres choix n'est correct.

Exercice 7. (Règles de dérivation)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I . En partant de la définition de la dérivée d'une fonction, montrer les propriétés suivantes :

- a) $(f + g)' = f' + g'$
- b) $(fg)' = f'g + fg'$
- c) si de plus $f \neq 0$ sur I , $(1/f)' = -f'/f^2$

Exercice 8. (V/F : Dérivation)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

- | | | |
|--|--------------------------|--------------------------|
| | V | F |
| a) Si $f(x) = x + e^x$, alors $(f^{-1})'(1) = 1 + \frac{1}{e}$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si f est dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors f' est continue sur I . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Exercice 9. (V/F : Propriétés de f et f' sur un intervalle)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b] \subset D(f)$, $a < b$, et dérivable sur $]a, b[$.

- | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|
| | V | F |
| a) Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est croissante sur $[a, b]$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si f est croissante sur $[a, b]$, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Si f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| e) Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \ell$ existe, alors f est dérivable à droite en a et la dérivée à droite est $f'_d(a) = \ell$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |