Lénaïc Chizat

28 novembre 2022

Analyse I – Série 10

Echauffement. (Dérivée de la valeur absolue)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x| + e^x$. Calculer f' et tracer les graphes de f et f'.

Sol.: *On a vu en cours que la dérivée de la valeur absolue $g(x) = |x|$ est*

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

et que g n'est pas dérivable en $x = 0$. Ainsi

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + e^x, & x > 0 \\ -1 + e^x, & x < 0 \end{cases}$$

Notez que $f'(0)$ n'existe pas non plus.

Comme rappel, la Fig. 1 montre les graphes des fonctions e^x et $|x|$. Les graphes de f et f' sont donnés aux Fig. 2 et 3 respectivement.

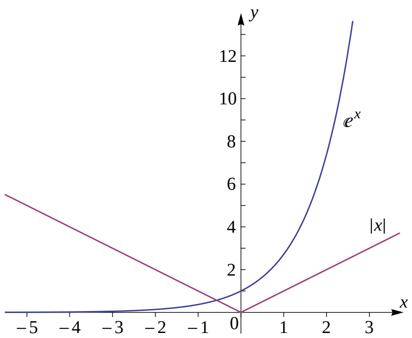

FIGURE 1 – Graphes de e^x et $|x|$.

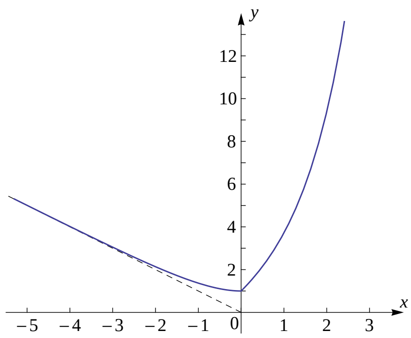

FIGURE 2 – Graphe de $f(x)$.

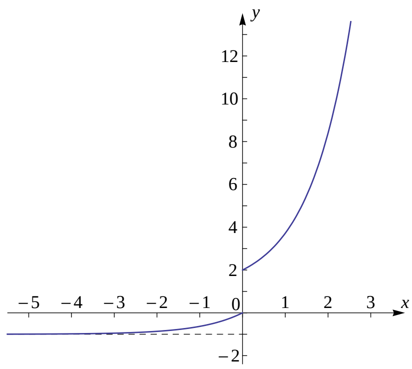

FIGURE 3 – Graphe de $f'(x)$.

Remarque : Les lignes hachurées dans les Fig. 2 et 3 sont les asymptotes à gauche de f et f' qui sont dues au fait que la fonction exponentielle admet une asymptote à gauche en $y = 0$.

Exercice 1. (Continuité de la dérivée)

Calculer la dérivée de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

en $x = 0$. Est-ce que la fonction f' est continue en $x = 0$?

Sol.: *Rappelons les deux limites suivantes (voir le cours et les exercices pour les démonstrations) :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to 0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0 \ .$$

Pour la dérivée de f en $x=0$ on a par définition

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1\cdot 0 = 0\,, \end{aligned}$$

où on a utilisé le rappel ci-dessus. Autre manière de calculer la limite : Observer que

$$-\left|\sin(x)\right| \le -\left|\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le \left|\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \left|\sin(x)\right|$$

et comme $\lim\limits_{x\to 0} |\sin(x)| = 0$, on conclut par le théorème de deux gendarmes que la limite est 0.

Pour $x \neq 0$ on a que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} \\ &= \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \ . \end{aligned}$$

On a déjà vu ci-dessus que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$. Pour le deuxième terme de f' on a

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\cos(x) \cdot \lim_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1\cdot 0 = 0 \ ,$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\,\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}}_{=1} \cdot \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette dernière limite n'existe pas, ce qui implique que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas.

Puisque la limite $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas, la fonction f' n'est pas continue en $x=0$.

Exercice 2. (Dérivée de la fonction réciproque)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction injective sur l'intervalle $I \subset D(f)$. Etudier la dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1} et calculer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = \sin(x)$ sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [0, \pi]$

c) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

d) $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$

e) $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

f) $f(x) = a^x$ avec $a = \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$

g) $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ sur $\mathbb{R}$

h) $f(x) = \mathrm{ch}(x)$ sur $I = [0, \infty[$

i) $f(x) = \mathrm{th}(x)$ sur $\mathbb{R}$

j) $f(x) = \coth(x)$ sur $\mathbb{R}^*$

Rappel : sh (resp. ch) est une notation pour désigner la fonction sinus (resp. cosinus) hyperbolique. La fonction cotangente hyperbolique coth est définie par coth := 1/th = ch/sh.

Sol.: *Toutes les fonctions f considérées sont des fonctions dérivables sur leur domaine. Par un théorème du cours, la fonction réciproque f^{-1} est donc dérivable sur l'image de tout intervalle sur lequel f' ne s'annule pas.*

Les définitions des fonctions réciproques f^{-1} et leurs domaines respectifs ont été vus dans l'Ex. III.9 de la Série 1 pour i) – vi) et dans l'Ex. 6 de la Série 7 pour vii) – x).

1. $f^{-1}(x) = \mathrm{Arcsin}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = [-1,1]$.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\cos(\mathrm{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\mathrm{Arcsin}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad D\left(\left(f^{-1}\right)'\right) = \left]-1,1\right[\,.$$

2. $f^{-1}(x) = \mathrm{Arccos}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = [-1,1]$.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{-\sin(\mathrm{Arccos}(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos(\mathrm{Arccos}(x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

$D\left(\left(f^{-1}\right)'\right) = \left]-1,1\right[\,.$

3. $f^{-1}(x) = \mathrm{Arctg}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos(\mathrm{Arctg}(x))^2}} = \cos(\mathrm{Arctg}(x))^2 \overset{*}{=} \frac{1}{1+\mathrm{tg}(\mathrm{Arctg}(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

où il faut utiliser la trigonométrie pour obtenir l'expression en $\mathrm{tg}(x)$ *à l'étape* * *:*

$$\cos(x)^2 = 1-\sin(x)^2 = 1-\mathrm{tg}(x)^2\cos(x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x)^2\left(1+\mathrm{tg}(x)^2\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos(x)^2 = \frac{1}{1+\mathrm{tg}(x)^2}$$

Le domaine de définition de la dérivée est $D((f^{-1})') = \mathbb{R}$.

4. $f^{-1}(x) = \mathrm{Log}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \left]0,\infty\right[\,.$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{e^{\mathrm{Log}(x)}} = \frac{1}{x}\,, \qquad D\left(\left(f^{-1}\right)'\right) = \left]0,\infty\right[\,.$$

5. $f^{-1}(x) = -\mathrm{Log}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \left]0,\infty\right[\,.$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{-e^{-(-\mathrm{Log}(x))}} = -\frac{1}{x}\,, \qquad D\left(\left(f^{-1}\right)'\right) = \left]0,\infty\right[\,.$$

6. $f^{-1}(x) = -\mathrm{Log}_2(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \left]0,\infty\right[\,.$

On a $f'(x) = (2^{-x})' = \left(e^{-x\,\mathrm{Log}(2)}\right)' = -\mathrm{Log}(2)\,e^{-x\,\mathrm{Log}(2)} = -\mathrm{Log}(2)\,2^{-x}$

et donc $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{-\mathrm{Log}(2)\cdot 2^{-(-\mathrm{Log}_2(x))}} = -\dfrac{1}{x\,\mathrm{Log}(2)}\,, \qquad D\left(\left(f^{-1}\right)'\right) = \left]0,\infty\right[\,.$

7. $f^{-1}(x) = \mathrm{arsinh}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \mathbb{R}\,.$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}(\mathrm{arsinh}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,, \qquad D((f^{-1})') = \mathbb{R}.$$

8. $f^{-1}(x) = \operatorname{arcosh}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \ [1,\infty[\,.$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{arcosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(\operatorname{arcosh}(x))^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,$$

$D((f^{-1})') = \,]1,\infty[\,.$

9. $f^{-1}(x) = \operatorname{artanh}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \,]-1,1[\,.$

Comme $f'(x) = \left(\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right)' = \dfrac{\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)^2} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)^2}$ *on a*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{artanh}(x))^2}} = \operatorname{ch}(\operatorname{artanh}(x))^2 \overset{**}{=} \frac{1}{1-\operatorname{th}(\operatorname{artanh}(x))^2} = \frac{1}{1-x^2}\,,$$

où l'étape ** *et due à*

$$\operatorname{ch}(x)^2 = 1 + \operatorname{sh}(x)^2 = 1 + \operatorname{th}(x)^2\operatorname{ch}(x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{ch}(x)^2\left(1 - \operatorname{th}(x)^2\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{ch}(x)^2 = \frac{1}{1-\operatorname{th}(x)^2}\,.$$

Le domaine de définition de la dérivée est $D\Big(\,(f^{-1})'\,\Big) = \,]-1,1[\,.$

10. $f^{-1}(x) = \operatorname{arcoth}(x)\,, \quad D(f^{-1}) = \,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,\infty[\,.$

Ici on a $f'(x) = \left(\dfrac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}\right)' = \dfrac{\operatorname{sh}(x)^2 - \operatorname{ch}(x)^2}{\operatorname{sh}(x)^2} = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)^2}$ *et donc*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{-\frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{arcoth}(x))^2}} = -\operatorname{sh}(\operatorname{arcoth}(x))^2 \overset{\star\star}{=} \frac{1}{1-\operatorname{coth}(\operatorname{arcoth}(x))^2} = \frac{1}{1-x^2}\,,$$

où ** *vient de*

$$\operatorname{sh}(x)^2 = \operatorname{ch}(x)^2 - 1 = \operatorname{coth}(x)^2\operatorname{sh}(x)^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sh}(x)^2\left(\operatorname{coth}(x)^2 - 1\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{sh}(x)^2 = \frac{1}{\operatorname{coth}(x)^2 - 1}\,.$$

Le domaine de définition la dérivée est $D((f^{-1})') = \mathbb{R}\setminus[-1,1].$

Exercice 3. (Théorème des accroissements finis)

Montrer en utilisant les corollaires du théorème des accroissements finis que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 \geq 0\,.$$

Sol.:

a) *Soit la fonction* $f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2$. *Observons d'abord qu'il suffit de montrer l'inégalité pour* $x \geq 0$ *puisque* f *est paire.*
On a $f(0) = \cos(0) - 1 + 0 = 0$. *Par le corollaire du théorème des accroissements finis vu en cours, l'inégalité est satisfaite si on montre que* $f'(x) \geq 0$ *pour* $x > 0$. *On a* $f'(x) = -\sin(x) + x$ *dont on ne connaît à priori pas le signe. Mais on a* $f'(0) = 0$. *De nouveau par le même*

corollaire il suffit de montrer que $f''(x) \geq 0$ pour $x > 0$. Or, $f''(x) = -\cos(x) + 1 \geq 0$ parce que $\cos(x) \in [-1, 1]$. Donc on a successivement

$$\begin{aligned} f''(x) \geq 0 \quad &\textit{et} \quad f'(0) = 0 \quad \overset{Cor.}{\Longrightarrow} \quad f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \quad &\textit{et} \quad f(0) = 0 \quad \overset{Cor.}{\Longrightarrow} \quad f(x) \geq 0 \end{aligned}$$

pour tout $x \geq 0$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où l'inégalité désirée.

Exercice 4. (Règle de Bernoulli-l'Hospital)

Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\mathrm{Log}(x-1)}{x-2}$ b) (*) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\Big(\mathrm{th}(x) - 1\Big)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(1 + \sin(x)\Big)^{1/x}$

Pour (b) on pourra appliquer BH plusieurs fois jusqu'à ce que la limite ne soit pas indéterminée.

Sol.:

Afin de calculer les limites demandées, on applique la règle de Bernoulli-l'Hospital (abrégée par BH) une fois qu'on a vérifié ses hypothèses.

a) Posons $f(x) = \mathrm{Log}(x-1)$ et $g(x) = x - 2$. Alors on a $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$. Les hypothèses de BH sont donc satisfaites et on a

$$\lim_{x\to 2} \frac{\mathrm{Log}(x-1)}{x-2} \overset{BH}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-1}}{1} = 1.$$

b) Ici, on doit utiliser la règle BH plusieurs fois. Pour la première fois on pose $f(x) = \mathrm{th}(x) - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ et $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$, les hypothèses sont satisfaites. On peut donc appliquer BH une première fois (les hypothèses pour les étapes suivantes seront vérifiées ci-dessous) :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x\Big(\mathrm{th}(x) - 1\Big) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{th}(x) - 1}{\frac{1}{x}} \overset{BH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\mathrm{ch}(x)^2} \\ &\overset{BH}{=} -\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\mathrm{sh}(2x)} \overset{BH}{=} -\lim_{x\to\infty} \frac{2}{2\,\mathrm{ch}(2x)} = 0\,. \end{aligned}$$

Pour la deuxième application de BH on a $\tilde{f}(x) = x^2$ et $\tilde{g}(x) = \mathrm{ch}(x)^2$ on a $\lim\limits_{x\to\infty} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \tilde{g}(x) = \infty$ et $g'(x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x) = \mathrm{sh}(2x) \neq 0$ pour $x \neq 0$ (ce qui est bien le cas lorsque $x \to \infty$).
Finalement pour la troisième fois avec $\bar{f}(x) = 2x$ et $\bar{g}(x) = \mathrm{sh}(2x)$ et donc $\lim\limits_{x\to\infty} \bar{f}(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \bar{g}(x) = \infty$ ainsi que $\bar{g}'(x) = 2\,\mathrm{ch}(2x) \neq 0$. On a donc bien pu appliquer BH les trois fois.

c) On a $\Big(1 + \sin(x)\Big)^{1/x} = \exp\Big(\frac{1}{x}\,\mathrm{Log}\Big(1 + \sin(x)\Big)\Big)$. On va donc d'abord calculer la limite de l'exposant. Posons $f(x) = \mathrm{Log}\Big(1 + \sin(x)\Big)$ et $g(x) = x$. Alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$. Ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Log}(1 + \sin(x))}{x} \overset{BH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}}{1} = 1\,,$$

et par conséquent

$$\lim_{x\to 0} (1 + \sin(x))^{1/x} = e^1 = e\,.$$

Exercice 5. (Application de la Règle de Bernoulli-l'Hospital)

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{1/n}-1\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

Indication : on pourra se ramener à l'étude de fonctions, en utilisant le fait que si $a_n = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$ alors $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x)$ si cette dernière limite existe.

Sol.:

a) La fonction $f(x) = x\left(e^{1/x}-1\right)$ *est une fonction d'interpolation de la suite, dans le sens où* $(a_n)_{n\geq 1}$ *est donnée par* $a_n = f(n)$, *d'où* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *(si cette limite existe). Il suit que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\left(e^{1/x}-1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}} \overset{BH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\, e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1\,,$$

où on a pu appliquer BH parce que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{1/x}-1\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ *et* $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \neq 0\,.$

b) Comme au point i), la fonction $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\,\mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{x}\right)}$ *est une fonction d'interpolation de la suite* $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. *On va d'abord calculer la limite de l'exposant :*

$$\lim_{x\to\infty} x\,\mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{BH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1-(1/x)}\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{1-\frac{1}{x}} = -1\,,$$

où on a pu utiliser BH parce que $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ *et* $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \neq 0\,.$
Finalement, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Exercice 6. (QCM : Révisions)

a) Si $f : X \to Y$ est croissante et bijective, alors $f^{-1} : Y \to X$ est

- ☐ décroissante
- ☐ croissante
- ☐ ni croissante ni décroissante
- ☐ bornée

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire et bijective, alors f^{-1} est

- ☐ impaire
- ☐ paire
- ☐ ni paire ni impaire
- ☐ périodique

c) Soit $f : X \to Y$ une fonction bijective et bornée sur X, alors $f^{-1} : Y \to X$ est

- ☐ bornée sur Y

☐ croissante

☐ paire

☐ aucun des autres choix n'est correct.

Sol.:

a) *$f : X \to Y$ est croissante et bijective, alors $f^{-1} : Y \to X$ est croissante. En effet, prenons $y, y' \in Y$ tels que $y \le y'$ et supposons que $f^{-1}(y) > f^{-1}(y')$. Comme f est croissante on a que $f(f^{-1}(y)) > f(f^{-1}(y'))$ ce qui implique que $y > y'$ en contradiction avec $y \le y'$.*

b) *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire et bijective, alors f^{-1} est impaire. En effet on a que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(f^{-1}(-x)) = -x = -f(f^{-1}(x)) = f(-f^{-1}(x))$ (on utilise que f est impaire dans la dernière égalité). Ainsi on a que $f(f^{-1}(-x)) = f(-f^{-1}(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En appliquant f^{-1} à cette égalité on obtient $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ce qui montre que f^{-1} est impaire.*

c) *Si f est bijective et bornée on ne peut rien en déduire sur f^{-1} (à part qu'elle est bijective, mais c'est banal). Il est clair que f^{-1} ne peut pas être paire car une fonction paire n'est pas injective. On a vu que si f est décroissante alors f^{-1} l'est aussi (même démonstration que pour croissant). Donc f^{-1} n'est pas forcément décroissante. L'exemple suivant montre aussi que f^{-1} n'a aucune raison d'être bornée sur Y. Prenons en effet $f :]1, +\infty[\to]0, 1[$ donnée par $f(x) = \frac{1}{x}$. Cette fonction est bijective et bornée (car $]0, 1[$ est borné) mais son inverse $f^{-1} :]0, 1[\to]1, +\infty[$ donné par $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas une fonction bornée.*

Exercice 7. (Règles de dérivation)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. En partant de la définition de la dérivée d'une fonction, montrer les propriétés suivantes :

a) $(f+g)' = f' + g'$

b) $(fg)' = f'g + fg'$

c) si de plus $f \neq 0$ sur I, $(1/f)' = -f'/f^2$

Sol :

a) *Soit $x \in I$. Alors*

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x).\end{aligned}$$

b) *Soit $x \in I$. Alors*

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]\cdot g(x+h)}{h} + \frac{f(x)\cdot [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x+h)\right) + \left(f(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) \\ &= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).\end{aligned}$$

c) Soit $x \in I$. Alors

$$\begin{aligned}(1/f)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)\cdot f(x+h)\cdot h} \\ &= -\frac{1}{f(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{f(x+h)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= -\frac{f'(x)}{f(x)^2}\end{aligned}$$

Exercice 8. (V/F : Dérivation)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

	V	F
a) Si $f(x) = x + e^x$, alors $(f^{-1})'(1) = 1 + \frac{1}{e}$.	☐	☐
b) Si f est dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors f' est continue sur I.	☐	☐

Sol.:

a) FAUX.
La formule pour la dérivée de la fonction réciproque est $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.
Ici on a $f'(x) = 1 + e^x$ et $f^{-1}(1) = 0$ puisque $f(0) = 1$. Ainsi

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}\,.$$

b) FAUX.
Prendre par exemple la fonction f de l'Ex. 1, $f(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$.
Alors f est dérivable sur $]-1,1[$ (en fait sur $\mathbb{R}$) mais sa dérivée n'est pas continue en 0 (cf. Ex. 1).

Exercice 9. (V/F : Propriétés de f et f' sur un intervalle)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b] \subset D(f)$, $a < b$, et dérivable sur $]a,b[$.

	V	F
a) Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in\,]a,b[$, alors f est croissante sur $[a,b]$.	☐	☐
b) Si f est croissante sur $[a,b]$, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in\,]a,b[$.	☐	☐
c) Si f est strictement croissante sur $[a,b]$, alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in\,]a,b[$.	☐	☐
d) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in\,]a,b[$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.	☐	☐
e) Si $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = \ell$ existe, alors f est dérivable à droite en a et la dérivée à droite est $f'_d(a) = \ell$.	☐	☐

Sol.:

a) *VRAI.*
Résultat du cours Preuve : Soient $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$. *Par le théorème des accroissements finis il existe* $u \in]x_1, x_2[$ *tel que* $f(x_2) - f(x_1) = f'(u)(x_2 - x_1)$. *Puisque* $f'(u) \geq 0$ *il suit que* $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, *c.-à-d.* f *est croissante.*

b) *VRAI.*
Pour tout $x \in]a,b[$, *la dérivée de* f *est par définition*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

Comme f *est croissante sur* $[a,b]$, $f(x+h) - f(x)$ *est du même signe que* h. *Ainsi le quotient dans la limite est toujours positif et donc* $f'(x) \geq 0$.

c) *FAUX.*
Prendre par exemple $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^3$. *Cette fonction est strictement croissante sur* $[-1,1]$ *mais* $f'(0) = 0$.

d) *VRAI.*
Résultat du cours.Preuve comme à la question 1 en remplaçant $\geq$ *par* $>$.

e) *VRAI.*
Soit $x \in]a,b[$. *Par le théorème des accroissements finis, il existe* $c_x \in]a,x[$ *tel que* $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$. *Comme* $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ *existe par hypothèse et que* $\lim\limits_{x\to a^+} c_x = a$, *on a*

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) \overset{*}{=} \lim_{x\to a^+} f'(c_x) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \overset{\text{déf}}{=} f'_d(a) ,$$

où * *découle de la définition de la limite d'une fonction.*