EPFL Lénaïc Chizat

Sections MX-SC-CGC 5 décembre 2022

Analyse I – Série 11

Echauffement. (Asymptotes)

Trouver les asymptotes verticales et horizontales de la fonction $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Sol.: *Une asymptote verticale ne peut exister qu'en un point où la fonction n'est pas définie, donc ici potentiellement en* $x = 0$. *En effet, on a*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Donc f *a une asymptote verticale en* $x = 0$.

Une asymptote horizontale (si elle existe) est caractérisée par les limites de f *à l'infini (positif ou négatif). Ici on a*

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

si bien que f *a une asymptote horizontale en* $y = 0$. *Le graphe de* f *est donné à la Fig. 1.*

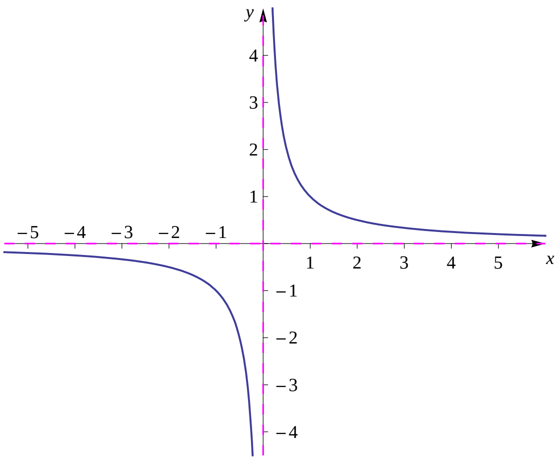

Figure 1 –

Exercice 1. (Points stationnaires et extremums)

Trouver les extremums locaux de la fonction f ainsi que le maximum et le minimum dans l'intervalle donné :

a) $f(x) = x^2 - \left|x + \frac{1}{4}\right| + 1 \quad \text{sur } [-1, 1]$ b) $f(x) = (x-1)^2 - 2\,|2-x| \quad \text{sur } \ ]2, 3[$

Sol.:

a) Avant de calculer ses dérivées, on récrit f *en distinguant les deux cas. On a*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \frac{5}{4}\,, & -1 \le x \le -\frac{1}{4} \\ x^2 - x + \frac{3}{4}\,, & -\frac{1}{4} < x \le 1 \end{cases}, \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x + 1\,, & -1 < x < -\frac{1}{4} \\ 2x - 1\,, & -\frac{1}{4} < x < 1 \end{cases}$$

Pour $x_0 = -\frac{1}{4}$ *on a*

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to -\frac{1}{4}^+} \frac{x^2 - x - \frac{5}{16}}{x + \frac{1}{4}} = \lim_{x \to -\frac{1}{4}^+} \frac{\left(x - \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)}{x + \frac{1}{4}} = -\frac{3}{2}$$

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to -\frac{1}{4}^-} \frac{x^2 + x + \frac{3}{16}}{x + \frac{1}{4}} = \lim_{x \to -\frac{1}{4}^-} \frac{\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)}{x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

et donc f *n'est pas dérivable en ce point. De plus* $f''(x) = 2$ *pour tout* $x \in \left]-1, -\frac{1}{4}\right[\cup \left]-\frac{1}{4}, 1\right[$. *Les extremums locaux et absolus sont donc parmi les points suivants :*

(a) *Points stationnaires :* $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$ *ou* $x_2 = \frac{1}{2}$. *Comme* $f''(x_1) = f''(x_2) > 0$, x_1 *et* x_2 *sont des minimums locaux. On a* $f(x_1) = 1$ *et* $f(x_2) = \frac{1}{2}$.

(b) *Points où* f' *n'existe pas : Le seul point à examiner est* $x_0 = -\frac{1}{4}$ *pour lequel on a* $f'_d(x_0) = -\frac{3}{2}$ *et* $f'_g(x_0) = \frac{1}{2}$ *(cf. ci-dessus). On déduit alors des signes de ces dérivées unilatérales que* x_0 *est un maximum local. On a* $f(x_0) = \frac{17}{16}$.

(c) *Extrémités du domaine de* f *: Comme* f *est continue sur* $[-1, 1]$, *on déduit des signes de* f' *au voisinage des extrémités (négatif vers* -1 *et positif vers* 1*) que* f *a des maximums locaux en* $a = -1$ *et* $b = 1$. *On a* $f(a) = \frac{5}{4}$ *et* $f(b) = \frac{3}{4}$.

$$(a), (b), (c) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \textit{maximum global en} \quad x = -1, \quad f(-1) = \frac{5}{4} \\ \textit{minimum global en} \quad x = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \textit{(cf. Fig. 2)}$$

b) *Comme* $2 - x < 0$ *pour tout* $x \in]2, 3[=: I$, *il ne faut pas distinguer deux cas pour* f. *On a en effet*

$$f(x) = (x-1)^2 + 2(2-x) = x^2 - 4x + 5 \quad \textit{et} \quad f'(x) = 2(x-2) \quad \textit{pour tout } x \in I$$

Les extremums locaux et globaux se trouvent de nouveau parmi les points suivants :

(a) *Points stationnaires :* $f'(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in I$, *donc aucun.*

(b) *Points où* f' *n'existe pas :* f' *existe sur tout* I, *donc aucun.*

(c) *Extrémités du domaine de* f *: Le domaine* I *est un intervalle ouvert et n'a donc pas d'extrémités.*

Ainsi la fonction f *ne possède ni d'extremum local ni absolu sur* I *(cf. Fig. 3).*

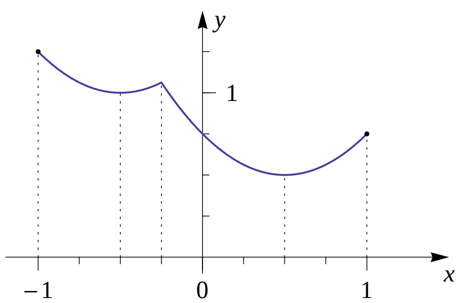

FIGURE 2 –

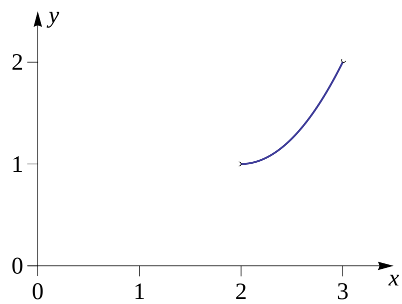

FIGURE 3 –

Remarque de vocabulaire : extremums et *extrema* sont deux formes admises pour le pluriel de *extremum* (la remarque s'applique à d'autres termes en -um).

Exercice 2. (Etude de fonctions)

En suivant point par point la méthode vue dans l'exemple du cours, étudier les fonctions suivantes et esquisser leurs graphes (points stationnaires, extremums, convexité, points d'inflexion, asymptotes) :

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ b) $f(x) = \dfrac{3x^2-x}{2x-1}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{x}\, e^{-\frac{1}{x}}$

Sol.: *Voir fiche de corrigé annexe sur le Moodle.*

Exercice 3. (V/F : Etude de fonctions)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b] \subset D(f)$, $a < b$, et dérivable sur $]a,b[$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

	V	F
a) Si f est convexe sur $[a,b]$, alors f' est croissante sur $]a,b[$.	☐	☐
b) Si f est deux fois dérivable sur $]a,b[$ et admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a,b[$, alors f' admet un point stationnaire en x_0.	☐	☐
c) Si la tangente au point $\big(c, f(c)\big)$ avec $c \in]a,b[$ est horizontale, alors f admet un extremum en c.	☐	☐

Sol.:

a) *VRAI.*
Soient $x_1, x_2 \in]a,b[$ tels que $x_1 < x_2$. Comme f est dérivable sur $]a,b[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x_1) = f'_d(x_1) &= \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f\Big(x_1+\lambda(x_2-x_1)\Big)-f(x_1)}{\lambda(x_2-x_1)} = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f\Big(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1\Big)-f(x_1)}{\lambda(x_2-x_1)} \\ &\le \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)-f(x_1)}{\lambda(x_2-x_1)} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ , \end{aligned}$$

où l'inégalité vient de la convexité de f et du fait que $\lambda(x_2-x_1) > 0$. De même on a (noter que $x_1 - x_2 < 0$)

$$\begin{aligned} f'(x_2) = f'_g(x_2) &= \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f\Big(x_2+\lambda(x_1-x_2)\Big)-f(x_2)}{\lambda(x_1-x_2)} = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f\Big(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\Big)-f(x_2)}{\lambda(x_1-x_2)} \\ &\ge \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-f(x_2)}{\lambda(x_1-x_2)} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ , \end{aligned}$$

où le signe de l'inégalité est inversé parce que le dénominateur est négatif. Ainsi on a

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2),$$

c.-à-d. f' est croissante.
Remarque : *En cours, on a vu que si f est dérivable sur $[a,b]$ et f' est croissante sur $[a,b]$ alors f est convexe sur $[a,b]$. Il s'agit, à quelques détails près, de la réciproque du résultat que l'on vient de montrer. En fait, si f est dérivable sur un intervalle I, on a le résultat suivant : f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I.*

b) *VRAI.*
Par le théorème sur les points d'inflexion, on sait que $f''(x_0) = 0$. Donc si on pose $g = f'$, on a $g'(x_0) = 0$ ce qui veut dire que $g = f'$ admet un point stationnaire en x_0.

c) *FAUX.*
Prendre par exemple $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^3$. *Alors* f *a une tangente horizontale en* $c = 0$ *car* $f'(0) = 0$ *mais elle n'admet pas d'extremum en ce point car pour tout* $\varepsilon > 0$ *on a* $f(-\varepsilon) = -\varepsilon^3 < f(0) = 0 < \varepsilon^3 = f(\varepsilon)$.

Exercice 4. (Développements limités)

Déterminer le développement limité d'ordre 3 de f autour de $a = 0$ et donner le reste $R_3(x)$.

a) $f(x) = \sin(3x)$ b) $f(x) = \mathrm{Log}(2 + x)$

Sol.: *Le développement limité d'ordre 3 autour du point a d'une fonction* f *est donné par la formule de Taylor*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + R_3(x)\,,$$

où $R_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(u)}{4!}(x-a)^4$ *pour un certain* u *entre* a *et* x, *ce qui veut dire que* $u \in\,]a, x[$ *si* $x > a$ *et que* $u \in\,]x, a[$ *si* $x < a$, *cf. cours.*

a) *On calcule les dérivées de* f :

$$f'(x) = 3\cos(3x), \quad f''(x) = -9\sin(3x), \quad f'''(x) = -27\cos(3x), \quad f^{(4)}(x) = 81\sin(3x)$$

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 3, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = -27.$$

Donc le développement limité de f *d'ordre* 3 *autour de* 0 *est*

$$f(x) = \sin(3x) = 0 + 3x + 0 \cdot x^2 - \frac{27}{3!}x^3 + R_3(x) = 3x - \frac{27}{3!}x^3 + R_3(x) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + R_3(x)\,,$$

avec $R_3(x) = \dfrac{81\sin(3u)}{4!}\, x^4 = \dfrac{27\sin(3u)}{8}\, x^4$ *pour un certain* u *entre* 0 *et* x.

b) *On calcule*

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(2+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(2+x)^4}$$

$$f(0) = \mathrm{Log}(2), \qquad f'(0) = \frac{1}{2}, \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(0) = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, le développement limité de f *d'ordre* 3 *autour de* 0 *est*

$$f(x) = \mathrm{Log}(2+x) = \mathrm{Log}(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + R_3(x)$$

avec $R_3(x) = -\dfrac{6}{4!(2+u)^4}\, x^4 = -\dfrac{1}{4(2+u)^4}\, x^4$ *pour un certain* u *entre* 0 *et* x.

Exercice 5. (Composition de développements limités)

Trouver le développement limité d'ordre n autour de $a = 0$ de

a) $f(x) = \mathrm{Log}(\cos(x))$, $n = 4$ b) $f(x) = \exp(\sin(x))$, $n = 4$

c) $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}$, $n = 3$

Sol.:

a) *On a vu au cours que* $f(u) = \mathrm{Log}(1+u)$ *admet le développement limité suivant autour de* $u=0$ *:*

$$\mathrm{Log}(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)\,.$$

Ici $1+u = \cos(x)$, *donc* $u = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$ *. On obtient donc*

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(\cos(x)) &= \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)\right) - \frac{1}{2}\underbrace{\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)\right)^2}_{=\frac{x^4}{4}+x^4\varepsilon(x)} + x^4\varepsilon(x)\\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + x^4\varepsilon(x)\,.\end{aligned}$$

Notez bien que comme on demande le développement limité d'ordre 4, toutes les puissances supérieures vont dans le reste $x^4\varepsilon(x)$ *et ne doivent donc pas être calculées explicitement.*

b) *On utilise les développements limités d'ordre* 3 *autour de* $a=0$ *de la fonction exponentielle et du sinus qui sont valables pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \qquad \textit{et} \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\exp(\sin(x)) &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right)^3\\ &\quad + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right)^4 + x^4\varepsilon(x)\\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x)\,.\end{aligned}$$

c) *Les développements limités d'ordre* 3 *autour de* $a=0$ *de* $\sin(x)$ *et* $(1+y)^{1/2}$ *sont*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \qquad \textit{et} \qquad \sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} + y^3\varepsilon(y)\,.$$

En posant $y = x - \frac{x^3}{6}$ *on a donc*

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sin(x)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right)^2\\ &\quad + \frac{1}{16}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right)^3 + x^3\varepsilon(x)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x)\\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)\,.\end{aligned}$$

Exercice 6. (Limites)

En utilisant des développements limités d'ordre convenable autour de 0, calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)}{x^5}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \mathrm{Log}(1+x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6}$

Sol.:

Il faut choisir l'ordre des développements limités tel qu'on puisse éliminer le dénominateur. Comme on s'intéresse seulement à des limites, il suffit d'exprimer le reste avec la notation $(x-a)^n\varepsilon(x)$, où $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$.

1. *Comme*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)\,,$$

on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left(x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{120} + \varepsilon(x)\right) = -\frac{1}{120}\,,$$

puisque $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

2. *Comme*

$$e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x - 1 + \frac{x^2}{2} - 2x + x^2\varepsilon(x) = x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

et

$$x - \mathrm{Log}(1+x) = x - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x),$$

on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \mathrm{Log}(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 + x^2\varepsilon(x)}{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\varepsilon(x)}{\frac{1}{2}+\varepsilon(x)} = 2.$$

3. *Pour le développement limité d'ordre 6 du numérateur, il faut obtenir le développement limité d'ordre 5 de $\sin(\sin(x))$ et celui d'ordre 6 de $\sin(x)^2$.*

Comme $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$, il suit que

$$\sin(\sin(x)) = \sin(x) - \frac{\sin(x)^3}{3!} + \frac{\sin(x)^5}{5!} + \underbrace{\sin(x)^5\varepsilon\Big(\sin(x)\Big)}_{=x^5\varepsilon(x)}, \tag{1}$$

où le remplacement de $\sin(x)^5\varepsilon\Big(\sin(x)\Big)$ par $x^5\varepsilon(x)$ s'explique comme suit : Puisque $\sin(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon\Big(\sin(x)\Big) = 0$ et donc $\varepsilon\Big(\sin(x)\Big)$ se comporte comme $\varepsilon(x)$. Ensuite, $\frac{\sin(x)}{x}$ est borné autour de 0 si bien que $\sin(x)^5\varepsilon(x) = \frac{\sin(x)^5}{x^5}x^5\varepsilon(x)$ se comporte comme $x^5\varepsilon(x)$. Pour les puissances de $\sin(x)$ on a

$$\sin(x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6\varepsilon(x)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + x^6\varepsilon(x),$$

$$\sin(x)^3 = \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + x^5\varepsilon(x)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)\right) = x^3 - \frac{x^5}{2} + x^5\varepsilon(x),$$

$$\sin(x)^5 = \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + x^5\varepsilon(x)\right)\left(x^3 - \frac{x^5}{2} + x^5\varepsilon(x)\right) = x^5 + x^5\varepsilon(x),$$

où on a calculé le développement limité d'ordre 6 de $\sin(x)^2$ *juste à cause du deuxième terme du numérateur de la limite demandée. Pour les autres puissances le développement limité d'ordre 5 suffit.*
Ainsi on obtient

$$\begin{aligned}\sin(\sin(x)) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{x^5}{2}\right) + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)\\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + x^5\varepsilon(x)\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{10} - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + x^6\varepsilon(x)\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{18} + x^6\varepsilon(x)\right) = \frac{1}{18}\ .\end{aligned}$$

Remarque : On peut aussi directement emboiter les développements limités du sinus sans passer par l'équation (1). *On aurait alors*

$$\begin{aligned}\sin(\sin(x)) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)\right)^3\\ &\quad + \frac{1}{120}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)\right)^5 + x^5\varepsilon(x)\\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right)^3\\ &\quad + \frac{1}{120}\big(x + x\varepsilon(x)\big)^5 + x^5\varepsilon(x)\\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) - \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{3x^5}{6}\right) + \frac{1}{120}x^5 + x^5\varepsilon(x)\\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + x^5\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Exercice 7. (Développement limité en $a \neq 0$)

Calculer le développement limité d'ordre 4 autour de $a = \frac{\pi}{3}$ de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+\cos(x)}\ .$$

Aide pour commencer : Introduire la variable $y := x - \pi/3$, puis utiliser de la trigonométrie et des DL connus pour calculer le DL de $\cos(x)$

Sol.: *Remarque préliminaire : L'idée n'est pas de dériver la fonction donnée (si vous le faites vous verrez pourquoi. . .) mais de se baser sur des développements limités (DL) autour de* 0 *qui sont bien connus.*

Pour trouver le DL de $\cos(x)$ *autour de* $a = \frac{\pi}{3}$, *on introduit la variable auxiliaire* $y := x - \frac{\pi}{3}$. *Ainsi on a*

$$\cos(x) = \cos\left(y + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(y)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(y)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos(y) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(y)\,.$$

Comme $x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow y = 0$, *on peut utiliser les DL de* $\cos(y)$ *et* $\sin(y)$ *autour de* $y = 0$ *pour obtenir*

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + y^4\varepsilon(y)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y - \frac{y^3}{6} + y^4\varepsilon(y)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,y - \frac{1}{4}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\,y^3 + \frac{1}{48}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\,. \qquad (2)\end{aligned}$$

On pose $u = \cos(x)$. *Il faut alors trouver le DL de* $(1+u)^{-1}$ *autour de* $u = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. *En introduisant* $v := u - \frac{1}{2}$, *on peut récrire*

$$\frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+v+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}+v} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{3}\,v}\,,$$

Pour le dernier terme, on utilise le DL $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x)$ *autour de* $x = 0$ *:*

$$\frac{1}{1+u} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\tfrac{2}{3}\,v\right) + \left(\tfrac{2}{3}\,v\right)^2 - \left(\tfrac{2}{3}\,v\right)^3 + \left(\tfrac{2}{3}\,v\right)^4 + v^4\varepsilon(v)\right). \qquad (3)$$

De (2) *on déduit*

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\,v = \frac{2}{3}\left(u - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,y - \frac{1}{4}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\,y^3 + \frac{1}{48}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\,y - \frac{1}{6}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{18}\,y^3 + \frac{1}{72}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\end{aligned}$$

qu'on met ensuite dans (3) *pour obtenir*

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{2}{3}\Bigg[1 &- \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\,y - \frac{1}{6}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{18}\,y^3 + \frac{1}{72}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right) \\ &+ \left(\frac{1}{3}\,y^2 + \frac{1}{36}\,y^4 + \frac{\sqrt{3}}{9}\,y^3 - \frac{1}{9}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right) \\ &- \left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\,y^3 - \frac{1}{6}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right) + \left(\frac{1}{9}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right) + y^4\varepsilon(y)\Bigg]\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\cos(x)} &= \frac{2}{3}\Bigg[1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\,y + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)y^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right)y^3 \\ &\qquad - \left(\frac{1}{72} - \frac{1}{36} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right)y^4 + y^4\varepsilon(y)\Bigg] \\ &= \frac{2}{3}\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\,y + \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}\,y^3 + \frac{13}{72}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right] \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\,y + \frac{1}{3}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\,y^3 + \frac{13}{108}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\,.\end{aligned}$$

En remplaçant finalement $y = x - \frac{\pi}{3}$ *on obtient*

$$\frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{13}{108}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\varepsilon(x)\,.$$

Exercice 8. (V/F : Limites de quotients)

Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, alors $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

b) Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas, alors $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ n'existe pas.

Sol.:

a) FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = x+\sin(x)$ et $g(x) = x$. Dans ce cas on a $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin(x)}{x}\right) = 1$ mais $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 + \cos(x)$ n'admet pas de limite à l'infini (et donc la dernière hypothèse de Bernoulli-l'Hospital n'est pas satisfaite).

b) FAUX.
Prendre les fonctions de la question précédente.
Remarque : Dans ce cas particulier (puisque $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$), l'affirmation est en quelque sorte une réciproque de Bernoulli-l'Hospital qui est, comme en cours, en général fausse.

Exercice 9. (QCM : Prolongement par continuité)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\cos(x)-1)-\cos(\sin(x))+1}{x^4} & \text{pour } x \neq 0, \\ c & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

Pour quelle valeur de $c \in \mathbb{R}$, la fonction f est-elle continue en $x = 0$?

- ☐ 0
- ☐ $-\frac{1}{6}$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{4}$

***Sol.** :*
Vu que $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ et $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + x^4\varepsilon(x)$, on a

$$\sin(\cos(x) - 1) = \sin\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)\right) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x),$$
$$1 - \cos(\sin(x)) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3!}x^3\right)^2 - \frac{1}{4!}x^4 + x^4\varepsilon(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x).$$

On obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(\cos(x) - 1)) + 1 - \cos(\sin(x))}{x^4} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{6} + \varepsilon(x)\right) = -\frac{1}{6}$$

et donc $c = -1/6$.

Exercice 10. (QCM : Calcul d'une limite)

La limite

$$\lim_{x\to 0} \left(e^{\frac{2}{x^2}} \left(\cos\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) - 1\right)\right)$$

est égale à

- ☐ $+\infty$
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ 0
- ☐ e^2

Sol. *:*

On a $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ *et donc*

$$e^{\frac{2}{x^2}}\left(\cos(e^{-\frac{1}{x^2}}) - 1\right) = e^{\frac{2}{x^2}}\left(-\frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{x^2}})^2 + (e^{-\frac{1}{x^2}})^2\varepsilon(e^{-\frac{1}{x^2}})\right) = -\frac{1}{2} + x^p\varepsilon(x)$$

avec $p > 0$ *arbitraire car* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^p}e^{-1/x^2} = 0$ *(voir les "croissances comparées" vues en cours) et donc*

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{2}{x^2}}\left(\cos(e^{-\frac{1}{x^2}}) - 1\right) = -\frac{1}{2}.$$