6.7 Dérivabilité sur des intervalles

Déf (dérivabilité sur un intervalle fermé). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

On dit que :

- f est dérivable à droite en $x_0 \in [a,b[$ si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe $\in \mathbb{R}$

  $\left| \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right.$ (en posant $h = x - x_0$)

  On note $f'_+(x_0)$ la valeur de cette limite.

- f est dérivable à gauche en $x_0 \in]a,b]$ si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe $\in \mathbb{R}$

  On note $f'_-(x_0)$ cette limite.

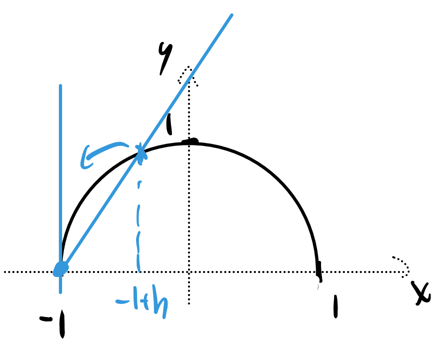
Prop : f est dérivable en $x_0 \in]a,b[\iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche et à droite} \\ \text{et } f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \end{cases}$

Déf : Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $[a,b]$ ssi :

- f est dérivable sur $]a,b[$, et
- f est dérivable à droite en a et à gauche en b.

Contre-exemple : $f : \begin{vmatrix} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1-x^2} \end{vmatrix}$

Rmq : $f(x)^2 + x^2 = 1$, $\forall x \in [-1,1]$



f est continue sur $[-1,1]$

f est dérivable sur $]-1,1[$ mais pas sur $[-1,1]$

En -1 : $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}$

$= \lim\limits_{x \to -1^+} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = +\infty$

En $+1$: $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$

Def (Fonctions de classe C^k). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide. On définit :

- $C^0(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} \text{ t.q. } f \text{ est continue sur } I \}$
- (pour $k \in \mathbb{N}^*$) $C^k(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} \text{ t.q. } f \text{ est } k \text{ fois dérivable sur } I \text{ et } f^{(k)} \text{ est continue sur } I \}$
- $C^\infty(I) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(I)$ c'est à dire

$f \in C^\infty(I)$ ssi $f \in C^k(I)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

(Notation : $\bigcap_{k=\ell}^{m} A_k := A_\ell \cap A_{\ell+1} \cap \ldots \cap A_m$)

6.8 Applications du calcul différentiel

6.8.1 Théorème de Rolle

Thm : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si

- f est continue sur $[a,b]$
- f est dérivable sur $]a,b[$
- $f(a) = f(b) = 0$

Alors : $\exists u \in]a,b[$ t.q. $f'(u) = 0$.

Exemple : $f : \begin{cases} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ (cf. ci-dessus) : satisfait les hypothèses et on a $u = 0$ (car $f'(u) = 0$) (le vérifier)

Preuve : f est continue sur $[a,b]$ donc elle admet un maximum M et un minimum m.

- Si $M = m = 0$ alors $f(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$ donc $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a,b[$
- Supposons que $M \neq 0$.

$\exists c \in]a,b[$ t.q $f(c) = M$ et donc $f(c) \geq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$

Comme f est dérivable en c (par hypothèse) :

- $f'(c) = \lim\limits_{x \to c-} \dfrac{\overbrace{f(x)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-c}_{\leq 0}} \geq 0$

- $f'(c) = \lim\limits_{x \to c+} \dfrac{\overbrace{f(x)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-c}_{\geq 0}} \leq 0$

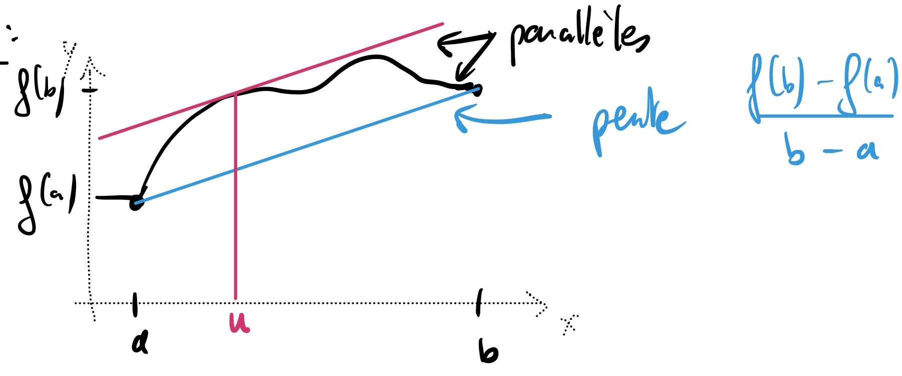
Donc $f'(c) = 0$

- Si seul $m \neq 0$ (et $M = 0$), on fait un raisonnement analogue en étudiant le minimum de f.

6.8.2 Théorème des accroissements finis

Thm : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Alors $\exists u \in]a,b[$ t.q $f'(u) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $(*)$

Illustration :



Preuve : Soit $g(x) = f(x) - \underbrace{\left(f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)}_{\text{Equation de la droite bleue.}}$

On a : $g(a) = 0$ et $g(b) = 0$

- g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$

Par le Thm. de Rolle $\exists u \in]a,b[$ t.q $g'(u) = 0 = f'(u) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Donc $f'(u) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ∎

Rmq : (*) peut être réécrite : $f(b) = f(a) + f'(u)\cdot(b-a)$

Reformulation du Thm :

Soit $h>0$ et f continue sur $[x, x+h]$ et dérivable sur $]x, x+h[$. Alors $\exists\, \theta \in]0,1[$ tq

$$f(x+h) = f(x) + f'(x+\theta h)\cdot h \qquad (**)$$

(Se déduit de la remarque avec $b = x+h$, $a = x$ et $u = x+\theta h$.
$(u \in]a,b[\Leftrightarrow \theta \in]0,1[)$)

Corollaire : Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors :

(i) $f' = 0$ sur $]a,b[$ $\Leftrightarrow$ f est constante sur $[a,b]$
(ii) $f' \geq 0$ sur $]a,b[$ $\Leftrightarrow$ f est croissante sur $[a,b]$
(iii) $f' \leq 0$ sur $]a,b[$ $\Leftrightarrow$ f est décroissante sur $[a,b]$
(iv) $f' > 0$ sur $]a,b[$ $\Rightarrow$ f est strictement croissante sur $[a,b]$
(v) $f' < 0$ sur $]a,b[$ $\Rightarrow$ f est strictement décroissante sur $[a,b]$
(vi) $f(a) \geq 0$ et $f' \geq 0$ sur $]a,b[$ $\Rightarrow$ $f \geq 0$ sur $[a,b]$

Contre-exemple à $\Leftarrow$ pour (iv) : $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{vmatrix}$ est strictement croissante et $f'(0) = 0$.

Thm (Accroissements finis généralisés). Soient f, g continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ et $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$. Alors : il existe $u \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f'(u)}{g'(u)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Rmq : Pour $g(x) = x$, on retrouve le Thm. des accroissements finis.
L'hypothèse $g'(x) \neq 0$ implique, par le Thm. Acc. finis que $g(b) - g(a) \neq 0$

Preuve : On pose : $h(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot [g(x) - g(a)] \right]$

On a
- $h(a) = 0$ et $h(b) = 0$
- h est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.

On conclut avec le Thm. de Rolle. ∎

6.8.3 Règle de Bernoulli - L'Hospital

Thm : Soient f, g deux fonctions dérivables sur $]a,b[$ avec $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$. Si :

- $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$
- $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{\text{existe}}{=} \ell \in \mathbb{R}$

Alors $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \left(= \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$

Rmq (généralisation de B.-H.) : on a un Thm. analogue pour $\lim_{x \to b-}$, $\lim_{x \to -\infty}$, $\lim_{x \to +\infty}$ et pour les formes indéterminées $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (au lieu de $\frac{0}{0}$).

Exemples :

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{la fct}^{\circ}\text{ est paire}}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(x)}{x} \overset{B.H\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{\cos(x)}{1} = 1$