Solides indéformables

Déf : Ensemble de points matériels + contraintes (distances entre points fixes)

Description : • 6 variables (ou degrés de liberté) $\longrightarrow$ 3 coord. pour c.d.m
$\longrightarrow$ 3 angles pour orientation

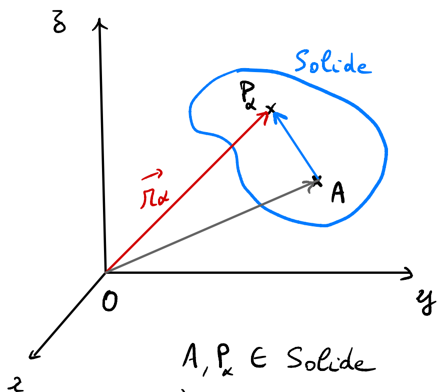
• 6 équations du mvt (différentielles) $\rightarrow$ Th. du c.d.m. $\boxed{M \dfrac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum \vec{F}^{ext}}$

$\rightarrow$ Th. du moment cin. (O point fixe du réf) $\boxed{\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O^{ext}}$ $\neq \tilde{M} \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

I) Cinématique du solide

Comme $\|\overrightarrow{AP_\alpha}\|$ = constante : $\boxed{\dfrac{d\overrightarrow{AP_\alpha}}{dt} = \vec{\omega}(t) \wedge \overrightarrow{AP_\alpha}}$

où $\vec{\omega}$ est le vecteur rotation instantanée du solide.



$A, P_\alpha \in$ Solide

$\Rightarrow \|\overrightarrow{AP_\alpha}\|$ = constante

Vitesse du point P_α dans $Oxyz$ (attaché au réf.)

$$\frac{d\,\overrightarrow{OP_\alpha}}{dt} = \vec{v}_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP_\alpha}\right) = \underbrace{\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}}_{\vec{v}_A} + \frac{d}{dt}\overrightarrow{AP_\alpha}$$

$$\boxed{\vec{v}_\alpha = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_\alpha}}$$

Remarque : $\vec{a}_\alpha = \dfrac{d}{dt}\vec{v}_\alpha = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP_\alpha} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_\alpha})$

1) Types / catégories de mouvements "instantanés" ($\leftrightarrow$ distribution des vitesses à instant "t")

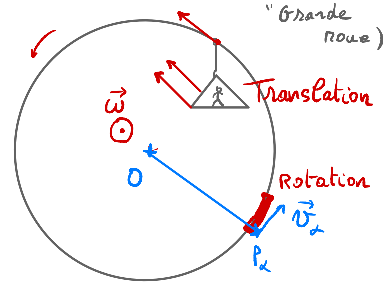
ⓐ Solide immobile $\quad \vec{v}_A = \vec{0}$, $\vec{\omega} = \vec{0}$

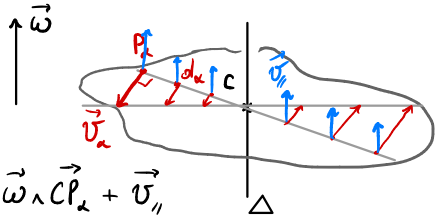
ⓑ Solide en translation : $\vec{v}_A \neq \vec{0}$; $\vec{\omega} = \vec{0}$ $\rightarrow$ Les vitesses de tous les points du solide sont égales.

Ⓒ Solide en rotation : $\vec{\omega} \neq \vec{0}$

↳ Si $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = 0$ → rotation dans un plan

↳ Si $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \neq 0$ → <u>mvt hélicoïdal</u>



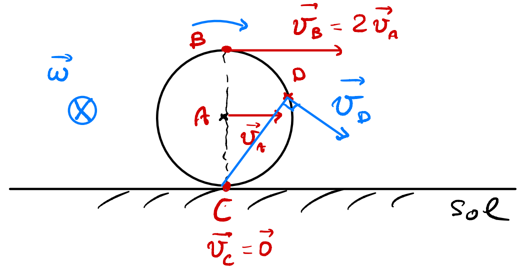


$\vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \wedge \vec{CP_\alpha} + \vec{v}_{/\!/}$

- Si $\vec{v}_{/\!/} = \vec{0}$: $\|\vec{v}_\alpha\| = \omega d_\alpha$
- d_α = distance entre P_α et l'axe de rotation Δ
- C = point $\in \Delta$ ⟶ $\vec{v}_C = \vec{v}_{/\!/}$

  (rotation simple : $\vec{v}_C = \vec{0}$)

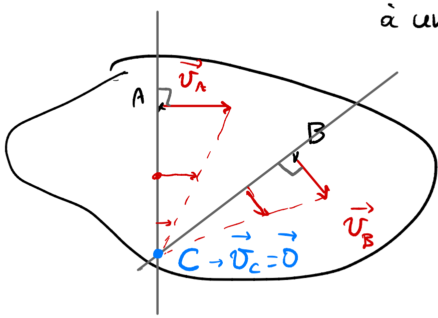
Exemple : roue de vélo



* Comment trouver l'axe de rotation instantané ? (mouvement plan)

$\vec{v}_{/\!/} = \vec{0}$

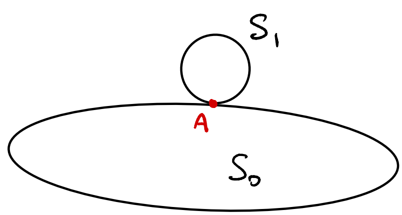
↳ ensemble des points fixes à un instant t ($\vec{v}_C(t) = \vec{0}$)



2) Solides en contact

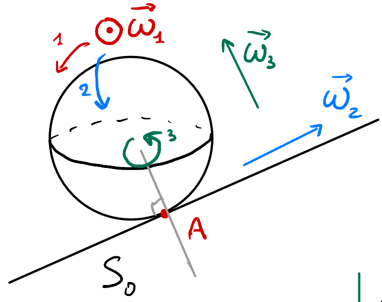
Solide S_0 fixe dans réf. terrestre

S_1 en contact avec S_0 au point $A \in S_1$



On appelle $\vec{v}_A$ <u>vitesse de glissement</u>

* "<u>Roulement sans glissement</u>" : $\vec{v}_A = \vec{0}$ → axe de rotation instant. passe par A



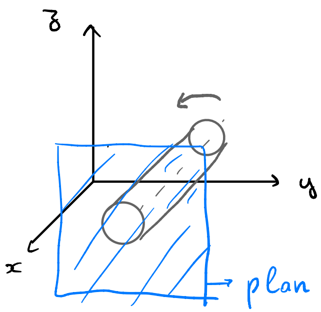
ω_1 et ω_2 ∈ plan tangent au deux solides

On les appelles <u>vitesses de roulement</u>

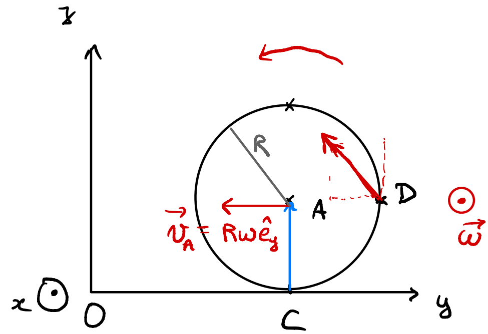
$\omega_3 = \omega_\perp$ perpendiculaire au plan de contact est appelé <u>vitesse de pivotement</u>

3) Déf : "<u>mouvement plan sur plan</u>" → il existe un plan du solide en mvt qui reste parallèle à un plan du réf.

<u>Exemple</u> : cylindre qui roule sur une surface plane.



Rayon R



- Roulement sans glissement : $\vec{v}_C = \vec{0}$
- $\vec{v}_A$? On part de $\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \vec{CA} = \omega \hat{e}_x \wedge R \hat{e}_z = -R\omega \vec{e}_y$
- $\vec{v}_D = \vec{\omega} \wedge \vec{CD} = \omega \hat{e}_x \wedge (R\hat{e}_z + R\hat{e}_y) = -R\omega \hat{e}_y + R\omega \hat{e}_z$

II) Dynamique du solide

$\vec{L}_0$ n'est pas toujours parallèle à $\vec{\omega}$ (contrairement à $\vec{p} = M\vec{v}_G$)

On s'intéresse à $\dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^{\,ext} = \sum_\alpha \vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha^{\,ext}$

0 fixe dans réf $\longrightarrow$ "auditoire", terrestre

1) Relation entre $\vec{L}_0$ et $\vec{L}_G$ où G est le centre de masse du solide (en général $\vec{v}_G \neq \vec{0}$)

Préliminaire : $\sum_\alpha m_\alpha \vec{GP}_\alpha = \vec{0}$ et $\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,*} = \vec{0}$

où $\boxed{\vec{v}_\alpha^{\,*} = \dfrac{d\vec{GP}_\alpha}{dt}}$ est la vitesse relative au centre de masse.

Remarque : $\vec{L}_G = \sum_\alpha m_\alpha \vec{GP}_\alpha \wedge \dfrac{d\vec{GP}_\alpha}{dt} = \sum_\alpha \vec{GP}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,*} = \vec{L}_G^{\,*}$

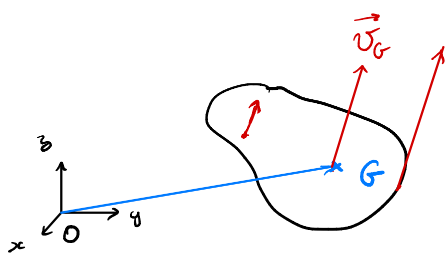
($\vec{L}_G$ ne dépend pas du référentiel)

$$\vec{L}_0 = \sum_\alpha \left\{ m_\alpha \vec{OP}_\alpha \wedge \frac{d}{dt}\vec{OP}_\alpha \right\} \qquad \text{or} \qquad \vec{OP}_\alpha = \vec{OG} + \vec{GP}_\alpha$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \left\{ (\vec{OG} + \vec{GP}_\alpha) \wedge (\vec{v}_G + \vec{v}_\alpha^{\,*}) \right\}$$

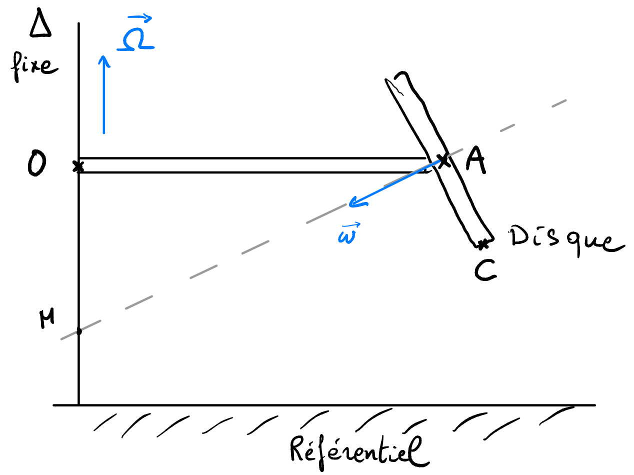
$$= \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \vec{OG} \wedge \vec{v}_G + \underbrace{\vec{OG} \wedge \vec{v}_\alpha^{\,*}}_{= \vec{OG} \wedge \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,*} = \vec{0}} + \underbrace{\vec{GP}_\alpha \wedge \vec{v}_G}_{= \left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{GP}_\alpha\right) \wedge \vec{v}_G = \vec{0}} + \overbrace{\vec{GP}_\alpha \wedge \vec{v}_\alpha^{\,*}}^{\vec{L}_G} \right\}$$

Donc $\boxed{\vec{L}_0 = \vec{L}_G + M\, \vec{OG} \wedge \vec{v}_G}$



Quizz 1

$\vec{\Omega}$ et $\vec{\omega}$ sont arbitraires



Quelles expressions de $\vec{v}_C$ sont correctes ?

1) ~~$\vec{v}_C = \vec{0}$~~
2) $\vec{v}_C = \vec{\Omega} \wedge \vec{OA} + \vec{\omega} \wedge \vec{AC}$
3) $\vec{v}_C = \vec{\Omega} \wedge \vec{MA} + \vec{\omega} \wedge \vec{AC}$

} Si $\vec{\omega} = \vec{0}$ tous les points du disque auraient la même vitesse (→ translation) → faux.

4) $\vec{v}_C = (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \vec{OC}$ → faux car O n'est pas sur l'axe de rotation instantané

5) $\vec{v}_C = \vec{\Omega} \wedge \vec{MA} + (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \vec{AC}$
6) $\vec{v}_C = (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \vec{MC}$
7) $\vec{v}_C = \vec{\Omega} \wedge \vec{OA} + (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \vec{AC}$

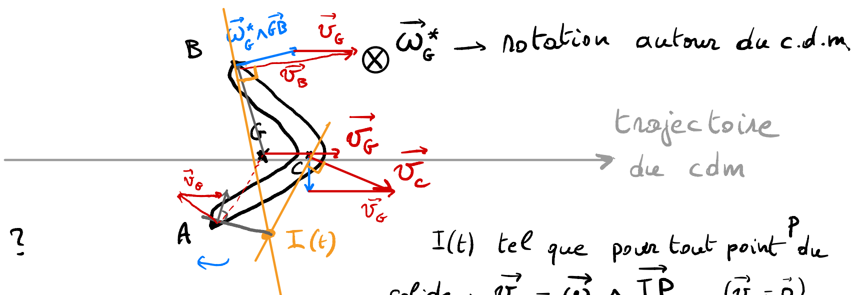
] <u>correctes</u>

5), 7) $= \vec{v}_A + (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \vec{AC}$

6) → $\vec{v}_M = \vec{0}$ car à l'intersection des deux axes

Quizz 2

Boomrang



Où se situe le centre de rotation instantané I(t) ?

1) En G
2) En A
3) En B
4) En C
5) $\boxed{\text{Ailleurs}}$

I(t) tel que pour tout point P du solide : $\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{IP}$ $\quad (\vec{v}_I = \vec{0})$

En particulier : $\vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge \vec{IG}$

donc $\|\vec{IG}\| = \dfrac{v_G}{\omega}$

De plus $\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (\vec{IG} + \vec{GP}) = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GP}$

Donc $\vec{\omega} = \vec{\omega}_G^*$

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}_G + M\,\vec{OG}\wedge\vec{v}_G}$$

$$\frac{d\vec{OG}}{dt} = \vec{v}_G$$

2) Th. du moment cinétique p/r au c.d.m

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} - \underbrace{M\,\vec{v}_G\wedge\vec{v}_G}_{=\vec{0}} - M\,\vec{OG}\wedge\frac{d\vec{v}_G}{dt}$$

$$= \vec{\mathcal{M}}_O^{ext} - M\,\vec{OG}\wedge\vec{a}_G \leftarrow$$

or $$\vec{\mathcal{M}}_O^{ext} = \sum_\alpha \vec{OP_\alpha}\wedge\vec{F}_\alpha^{ext} = \sum_\alpha\left(\vec{OG}+\vec{GP_\alpha}\right)\wedge\vec{F}_\alpha^{ext}$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha \vec{OG}\wedge\vec{F}_\alpha^{ext}}_{=\vec{OG}\wedge\sum_\alpha\vec{F}_\alpha^{ext}} + \underbrace{\sum_\alpha \vec{GP_\alpha}\wedge\vec{F}_\alpha^{ext}}_{\vec{\mathcal{M}}_G^{ext}}$$

$$= \vec{OG}\wedge M\,\vec{a}_G \leftarrow$$

Donc $$\boxed{\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_G^{ext}}$$

3) Th. du mom. cin. p/r à un point quelconque A

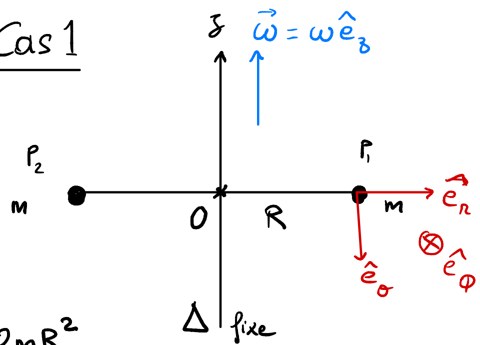
$$\boxed{\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_\alpha \vec{\mathcal{M}}_{A,\alpha}^{ext} - \vec{v}_A\wedge M\vec{v}_G}$$

Cas particulier : Si $\vec{v}_A = \vec{0}$ (A fixe dans réf.)
Si $A = G$ $\Big\}$ $\vec{v}_A\wedge\vec{v}_G = \vec{0}$

---

4) Exemples de calculs de $\vec{L}$

Cas 1



$$\vec{L}_O = m\,\vec{OP_1}\wedge\vec{v}_1 + m\,\vec{OP_2}\wedge\vec{v}_2$$
$$= mR\,\hat{e}_r\wedge\omega R\,\hat{e}_\phi + (-R\hat{e}_r)\wedge(-\omega R\,\hat{e}_\phi)m$$
$$= \boxed{2mR^2\omega\,\hat{e}_z}$$

On peut écrire : $\boxed{L_{O,z} = \underbrace{I_{Oz}}_{\text{dépend du solide}}\,\omega}$ où $I_{Oz} = 2mR^2$

dépend du mvt.

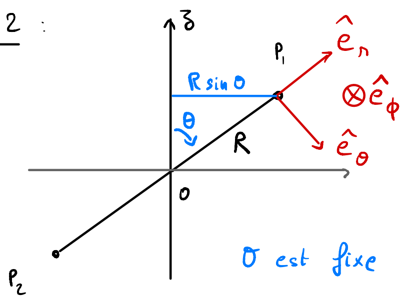
I_{Oz} est le moment d'inertie p/r à l'axe Oz

Projection du mom. cin. p/r à Δ = mom. d'inertie (I_Δ) p/r à Δ × vitesse angulaire

Ici $\vec{L}_o = 2mR^2\omega\,\hat{e}_z$ ne dépend pas du temps (si $\omega = c^{st}$)

$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_o^{ext} = \vec{0}$ → pas de moment de force appliqué sur l'axe.

Cas 2 :



$\vec{L}_o = m R\hat{e}_r \wedge \omega R\sin\theta\,\hat{e}_\phi + \ldots$ "
$= 2mR^2\sin\theta\,(-\hat{e}_\theta)$

Donc $\vec{L}_o(t) = -2mR^2\sin\theta\,\hat{e}_\theta(t)$

Conséquence $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o^{ext} \neq \vec{0}$