Minitest 3 - compléments de correction

Méthode graphique

En utilisant la conservation du moment cinétique p/r à O : $L_0 = mr^2\dot{\theta}$, il est possible d'écrire l'énergie mécanique en fonction de $r, \dot{r}$ seulement :

$$E = K_r + V_{eff}(r) \quad \text{où} \quad K_r = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \quad \text{et} \quad \boxed{V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2}$$

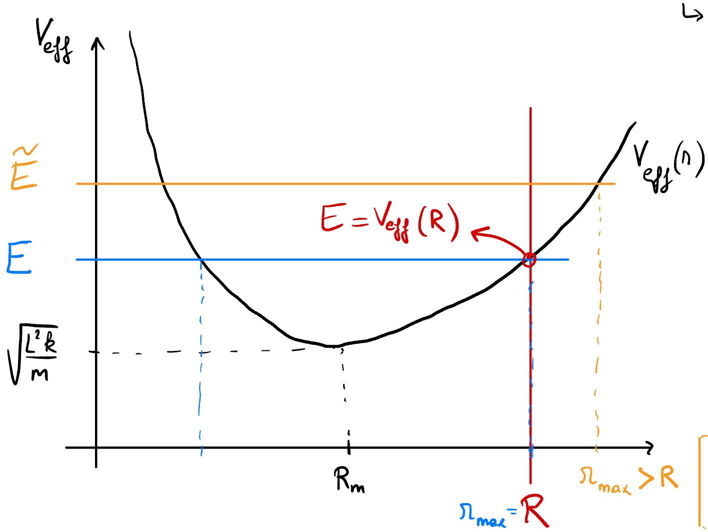
Potentiel effectif contenant l'énergie cinétique "angulaire"

Comme $K_r \geqslant 0$, les seules positions accessibles se situent graphiquement pour des valeurs de r telles que $V_{eff}(r) \leqslant E$ (E est conservée, donc fixée par conditions initiales)

Pour tracer l'allure de $V_{eff}(r)$, on remarque que $\frac{L^2}{2mr^2}$ domine pour r petit et $\frac{1}{2}kr^2$ domine pour r grand.

Comme $\frac{1}{r^2}$ est décroissante et r^2 croissante, on peut trouver le rayon R_m où V_{eff} atteint son minimum (eq. 11-12) qui correspond à $V_{eff}(R_m) = \sqrt{\frac{L^2k}{m}}$

↳ E ne peut pas être inférieure à cette valeur.



Pour une valeur de E donnée par les conditions initiales, r sera borné par r_{min} et r_{max} correspondant aux points d'intersections entre E et $V_{eff}(r)$

Par exemple pour $E = \tilde{E}$ (orange) $r_{max} > R \rightarrow$ le ressort casse !

Les énergies mécaniques permises sans casser le ressort sont telles que :

$$\boxed{E \leqslant V_{eff}(R) = \frac{1}{2}kR^2 + \frac{L^2}{2mR^2}}$$

Comparaison avec méthode algébrique

Selon l'éq. (9) on arrive à la condition : $\frac{E}{k}\left(1+\sqrt{1-\frac{L^2 k}{E^2 m}}\right) \leqslant R^2$ (9)

Isolons la racine à gauche :

$$\sqrt{1-\frac{L^2 k}{E^2 m}} \leqslant \frac{kR^2}{E} - 1$$

Comme le terme de gauche est positif (cf. eq. (7), $\Delta \geqslant 0$) on peut élever au carré des deux côtés en conservant le sens de l'inégalité :

$$1 - \frac{L^2 k}{E^2 m} \leqslant \frac{k^2 R^4}{E^2} - \frac{2kR^2}{E} + 1 \iff \frac{2kR^2}{E} \leqslant \frac{k^2 R^4}{E^2} + \frac{L^2 k}{E^2 m}$$

Enfin, on multiplie par $\frac{E^2}{2kR^2} > 0$: $\boxed{E \leqslant \frac{1}{2} k R^2 + \frac{L^2}{2mR^2}}$

qui correspond bien à la solution trouvée graphiquement