$$\mathbb{Z}.1_K = \{ n.1_K \quad n \in \mathbb{Z} \} = \mathrm{Can}_K(\mathbb{Z}) = \mathbb{F}_p$$

$$n.1_K = \begin{cases} 1_K + \dots + 1_K \ n \text{ fois si } n > 0 \\ 0_K \text{ si } \quad n = 0 \\ -|n|.1_K \text{ si } \quad n < 0. \end{cases}$$

$$\mathrm{Can}_K(\mathbb{Z}) = \underset{\underset{\mathbb{F}_p}{\wr\!\wr}}{\mathbb{Z}.1_K} \subset K$$

$\ker(\mathrm{Can}_K) = \ker(n \mapsto n.1_K) = p\mathbb{Z}$

$p = 0$ soit $p > 0$ p premier

alors $p.1_K = 0_K$

$k \in \mathbb{Z}$ $\quad (n+pk).1_K = n.1_K + k.p.1_K$

$= n.1_K$

$(n+pk)_K = n_K \in K$

n_K ne dépend que de $n \pmod p$

– Can_K définit une appl

de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow K$

$\bar{n}_{(p)} \longrightarrow n_K$

$n + p\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}^3$ $\quad v_1 = (1,1,0) \quad v_2 = (0,1,0)$

$$W = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \{ x(1,1,0) + y(0,1,0) \quad x, y \in \mathbb{Q} \}$$

$$= \{ (x, x+y, 0) = w \quad x, y \in \mathbb{Q} \}$$

W les vecteurs de la forme

$(x, x+y, 0)$ ou $x, y \in \mathbb{Q}$

$$W = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$$

$$= \{ (x',y',0) \quad x',y' \in \mathbb{Q} \}$$

$$(1,0,0) = v_1 - v_2 = v_1'$$

$$\mathrm{Vect}(v_1', v_2) \supset \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$$

car $v_1 = v_1' + v_2$

et

$$\subset \qquad v_1' = v_1 - v_2$$

$$W = \{ v \text{ tq } e_3^*(v) = 0 \}$$

$$= \{ (x, y, z) \text{ tq } z = 0 \}$$

$$V = \{ (x, y, z) \quad x, y, z \in \mathbb{Q} \}$$

$$V = \{ v \text{ tq } 0 \cdot x = 0 \}$$

$$W = \left\{ (x,y,z) \quad 2x = \frac{y}{3} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \text{ tq } 6x - y = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ (x, 6x, z) \quad x,z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\rightarrow \quad = \left\{ x(1,6,0) + z(0,0,1) \quad x,z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left((1,6,0)\ (0,0,1) \right)$$

$\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$

- $\mathrm{eval}_B : \varphi \longrightarrow (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d))$

eval_B inj car φ est déterminée par $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d))$

(si $\varphi(e_1) = \varphi'(e_1), \dots, \varphi(e_d) = \varphi'(e_d)$)
$\Rightarrow \varphi = \varphi'$)

On se donne

$$(w_1, \dots, w_d) \in W^d$$

et on cherche φ linéaire tq

$$\varphi(e_1) = w_1 \qquad \dots \qquad \varphi(e_d) = w_d \ ?$$

$$\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_d e_d) \quad \text{si } v = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d$$

$$:= x_1 \cdot w_1 + \dots + x_d \cdot w_d$$

$$\varphi(e_1) = \varphi(1e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_d)$$

$$= 1w_1 + 0w_2 + 0w_d$$

$$= w_1$$

et $\varphi(e_i) = w_i \quad \forall i = 1 \dots d.$

$$V \quad\quad V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$$

$$\cup$$

$$B = \{e_1, \ldots, e_d\}$$

$B^* \subset V^*$ $\quad B^*$ est formée de formes linéaires

$e_1^* : v \longrightarrow x_1$ est linéaire

si $\underset{\smile}{v} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_d e_d$

$$\{e_1^*, \ldots\ldots, e_d^*\}$$

$$\pi_{Ke_1} : v \longrightarrow e_1^*(v) . e_1 = x_1 e_1$$

$$\pi_{\text{vect}(e_1, e_2)} : v \longrightarrow e_1^*(v) e_1 + e_2^*(v) e_2$$

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 .$$

$$
\begin{array}{ccccc}
V & \rightsquigarrow & V^* & \rightsquigarrow & (V^*)^* \\
\cup & & \cup & & \cup \\
B & \longrightarrow & B^* & \rightsquigarrow & (B^*)^*
\end{array}
$$

$$B^* = \{ e_1^*, \dots, e_d^* \}$$

$$B^{**} = \{ (e_1^*)^* \quad (e_d^*)^* \}$$

$$
\begin{aligned}
(e_1^*)^* : V^* &\longrightarrow K \\
l &\longmapsto (e_1^*)^*(l) = \text{la } 1^{\text{er}} \text{ coord de } l \text{ exprimée ds } B^*
\end{aligned}
$$

$l \in V^*$ s'écrit

$$l = y_1 e_1^* + \dots + y_d e_d^*$$

$$y_i = l(e_i)$$

$$(e_i^*)^* : \begin{array}{ccc} l & \longrightarrow & l(e_i) \\ \cap & & \cap \\ V^* & \longrightarrow & K \end{array}$$