Corrigé 11 : moment d'inertie

1. **Accélération angulaire**

   Selon le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe
   $$\vec{M}_{\text{axe}} = I_{\text{axe}}\,\dot{\vec{\omega}}_{\text{axe}}\,,$$
   pour un moment de force donné, plus le moment d'inertie est grand, plus l'accélération angulaire est petite.

   Par définition,
   $$I_{\text{axe}} = \int_{\text{corps}} r^2_{\perp\text{axe}}\,dm\,.$$
   Plus un élément de masse dm est éloigné de l'axe, plus sa contribution au moment d'inertie est importante. Par conséquent,
   $$I_B < I_C < I_A\,.$$
   Remarque : $I_B = \frac{1}{2}mR^2$ et $I_A = mR^2$.

2. **Freinage d'un cylindre en rotation**

   (a) On exploite le théorème du moment cinétique et on résout l'équation différentielle obtenue en devinant la forme de la solution.

   Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation s'écrit, selon $\hat{e}_z$ choisi pointant dans le plan de la feuille,
   $$M = -RF = -kR\omega = \dot{L} = I\dot{\omega} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\omega}\,.$$
   On obtient alors l'équation différentielle
   $$\dot{\omega}(t) = -\frac{2k}{mR}\,\omega(t)\,.$$

   (b) On devine que cette équation différentielle a pour solution une fonction $\omega(t)$ de type exponentielle. On va donc poser, dans le cas le plus général,
   $$\omega(t) = Ae^{Bt}\,,$$
   où A et B sont des constantes.

   L'accélération angulaire s'écrit alors
   $$\dot{\omega}(t) = BAe^{Bt} = B\omega(t)\,,$$
   si bien que
   $$A = \omega(0) = \omega_0 \quad \text{et} \quad B = -\frac{2k}{mR}\,.$$
   La vitesse angulaire a ainsi finalement pour expression
   $$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{2k}{mR}t}\,.$$

3. **Mouvement d'un solide**

(a) La vitesse du point B du solide s'exprime des deux manières

$$\begin{aligned}\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} &= \vec{v}_{A^*} + \vec{\omega}^* \wedge \overrightarrow{A^*B} \\ &= \vec{v}_{A^*} + \vec{\omega}^* \wedge (\overrightarrow{A^*A} + \overrightarrow{AB}) \\ &= \vec{v}_A + \vec{\omega}^* \wedge \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

d'où

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega}^*) \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} \qquad \forall\, B$$

et donc $\vec{\omega} = \vec{\omega}^*$.

(b)

i. Tous les points du solide sont (uniquement) en translation :

$$\vec{\omega} = \vec{0} \qquad \vec{v}_B = \vec{v}_A \neq \vec{0} \quad \forall\, B\,.$$

ii. Le point A est en translation et le solide en rotation : $\vec{v}_A \neq \vec{0}$ et $\vec{\omega} \neq \vec{0}$. Il existe donc un centre de rotation instantanée : un point C lié au solide et de vitesse instantanée nulle, tel que

$$\vec{v}_B = \underbrace{\vec{v}_C}_{\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CB}\,.$$

Le point C peut être déterminé à partir des positions et des vitesses de deux points du solide (intersection des normales aux vitesses, passant par les points) ou par la relation

$$\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2}\,.$$

Le mouvement instantané du solide est donc une rotation :

$$\vec{\omega} \neq \vec{0} \qquad \vec{v}_B \cdot \vec{\omega} = 0 \quad \forall\, B\,.$$

iii. Le point A est en mouvement : il tourne autour de O faisant un angle $\Delta\alpha$ pendant un certain intervalle de temps Δt. Il existe un vecteur $\vec{\Omega}$ tel que

$$\vec{v}_A = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}\,.$$

Pendant cette même durée, le solide tourne autour de A du même angle : sa vitesse angulaire est égale à $\vec{\Omega}$. Le solide est donc en rotation autour du point fixe O.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OB}\,.$$

Il s'agit donc d'un cas particulier du point ii. ci-dessus.

iv. Le point A est en translation et le solide en rotation : $\vec{v}_A \neq \vec{0}$ et $\vec{\omega} \neq \vec{0}$. Il existe donc un point C lié au solide et de vitesse parallèle à $\vec{\omega}$, tel que

$$\vec{v}_B = \underbrace{\vec{v}_C}_{\parallel \vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CB}\,.$$

Le mouvement instantané du solide est donc hélicoïdal :

$$\vec{\omega} \neq \vec{0} \qquad \vec{v}_B \cdot \vec{\omega} \neq 0 \quad \forall\, B\,.$$