Corrigé Série 11 : Moment d'inertie

Question conceptuelle

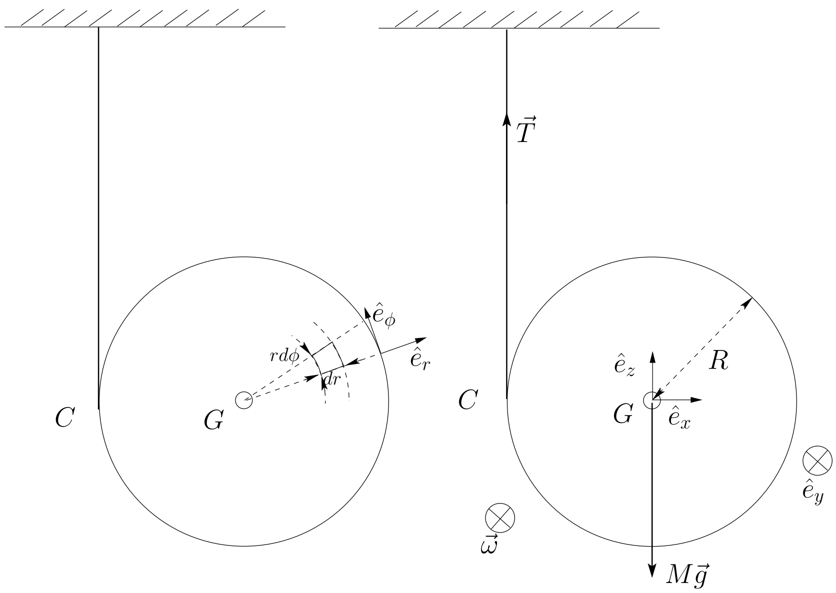
Lorsque le système motard-moto est en l'air, il ne subit que son poids comme force extérieure (on néglige les frottements de l'air). Le moment de ce poids par rapport au centre de masse est nul, donc le moment cinétique total du système par rapport au centre de masse est constant.

a) Si le motard freine de la roue arrière, il diminue le moment cinétique de la roue, donc la conservation du moment cinétique total implique une mise en rotation de l'ensemble du système dans le même sens que la roue arrière, donc la moto pique du nez.

b) S'il freine avec la roue avant, il va se passer exactement la même chose.

c) Seule la roue arrière est motorisée. En ré-accélérant la roue arrière, le motard pourra arrêter la rotation de la moto (s'il redonne à la roue arrière sa vitesse de rotation initiale). Ainsi en freinant la roue arrière ou en donnant des gaz, le motard pourra garder sa vitesse de rotation sous contrôle pendant le saut.

1 Yoyo



a) Le moment d'inertie d'un disque par rapport à son axe de symétrie de révolution est donné par la double intégrale prise sur la surface du disque :

$$I_{\text{disque}} = \int_{\text{disque}} r^2 dm = \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \sigma r d\phi dr = \sigma \int_{r=0}^{R} r^3 dr \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$I_{\text{disque}} = \frac{2\pi}{4}\sigma R^4\,, \tag{1}$$

où l'élément de surface utilisé est $rd\phi dr$, et σ est la masse surfacique (i.e. la masse par unité de surface) donnée par $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$. On obtient finalement le moment d'inertie pour le disque

$$I_{\text{disque}} = \frac{1}{2} M R^2\,. \tag{2}$$

b) Pour résoudre ce problème, on va utiliser les équations du mouvement du yoyo. Les forces qui s'appliquent sur le yoyo sont son poids $\vec{P} = M\vec{g}$, dirigé vers le bas, et la tension dans le fil $\vec{T}$, dirigée vers le haut. Les équations du mouvement sont données d'une part par le théorème du centre de masse (deuxième loi de Newton appliquée au centre de masse) qui projeté sur $\hat{e}_z$ donne

$$Ma_{G,z} = -Mg + T \;\Rightarrow\; a_{G,z} = \frac{-Mg + T}{M} \tag{3}$$

et d'autre part par le théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse G :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = I_{\text{disque}}\,\dot{\omega}\hat{e}_y = \Sigma\vec{M}_G = \overrightarrow{GG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{GC} \wedge \vec{T}\,.$$

qui projeté sur $\hat{e}_y$ donne

$$I_{\text{disque}}\,\dot{\omega} = RT\,. \tag{4}$$

Tous les points du fil ont une vitesse nulle y compris le point de contact C ($v_C = 0$). On a ainsi $\vec{v}_G = \underbrace{\vec{v}_C}_{=\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG}$ ($\vec{v}_G$ pointe bien vers le bas) donc la vitesse et l'accélération angulaire du disque sont reliées par

$$\vec{v_G} = (\omega\,\hat{e}_y) \wedge (R\,\hat{e}_x) = -\omega R\hat{e}_z \tag{5}$$

Ce qui donne en dérivant par rapport au temps et en utilisant (4) :

$$a_{G,z} = -\dot{\omega}\,R = -\frac{R^2T}{I_{\text{disque}}} = -\frac{2T}{M} \tag{6}$$

En égalisant les expressions (3) et (6) de l'accélération selon z, on obtient

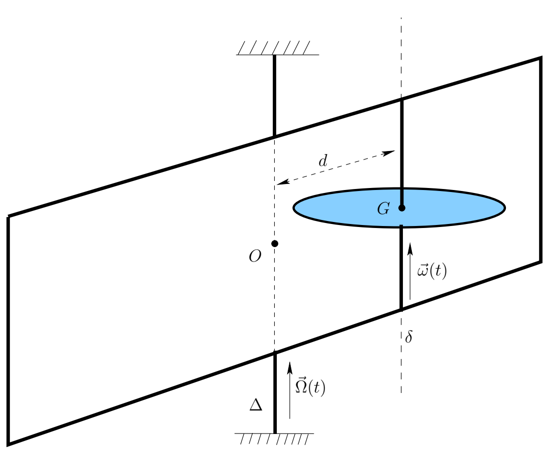
$$-Mg + T = -2T \;\Rightarrow\; T = \frac{Mg}{3}$$

et par suite

$$a_{G,z} = -\frac{2}{3}g\,. \tag{7}$$

On obtient une accélération plus faible que si le yoyo était en chute libre (il tombe plus lentement). D'un point de vue de l'énergie, ceci peut se comprendre en considérant que l'énergie potentiel de pesanteur est convertie non plus seulement en énergie cinétique de translation mais aussi en énergie cinétique de rotation.

2 Volant et châssis



a) Le volant tourne autour d'un axe principal d'inertie avec une vitesse angulaire de rotation totale $\vec{\omega}+\vec{\Omega}$; son moment cinétique par rapport au point G vaut ainsi

$$\vec{L}_{\mathrm{v},G} = I_{\mathrm{v},G}\,(\vec{\omega}+\vec{\Omega})\,. \tag{8}$$

On obtient son moment cinétique par rapport à O par le théorème du transfert :

$$\vec{L}_{\mathrm{v},O} = \vec{L}_{\mathrm{v},G} + \overrightarrow{OG}\wedge m\vec{v}_G = I_{\mathrm{v},G}\,(\vec{\omega}+\vec{\Omega}) + \overrightarrow{OG}\wedge m\vec{v}_G\,. \tag{9}$$

Le point O étant immobile et les points G et O appartenant tous deux au châssis, leurs vitesses doivent satisfaire

$$\vec{v}_G = \vec{v}_O + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OG} = \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OG}\,. \tag{10}$$

Le dernier terme de l'éq. (9) vaut donc $md^2\vec{\omega}$, ce qui se retrouve géométriquement, ou peut être démontré par la formule du double produit vectoriel :

$$\overrightarrow{OG}\wedge m(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OG}) = m\left(\overrightarrow{OG}^2\vec{\Omega} - (\overrightarrow{OG}\cdot\vec{\Omega})\,\overrightarrow{OG}\right) = md^2\vec{\Omega}$$

Le châssis tourne également autour d'un axe principal d'inertie et son moment cinétique par rapport à O vaut

$$\vec{L}_{\mathrm{c},O} = I_{\mathrm{c},O}\,\vec{\Omega}\,. \tag{11}$$

En combinant les relations ci-dessus, le moment cinétique total du système volant+châssis par rapport à O vaut alors :

$$\begin{aligned}\vec{L}_{\mathrm{tot},O} = \vec{L}_{\mathrm{c},O} + \vec{L}_{\mathrm{v},O} &= I_{\mathrm{c},O}\,\vec{\Omega} + I_{\mathrm{v},G}\,(\vec{\omega}+\vec{\Omega}) + md^2\vec{\Omega} \\ &= (I_{\mathrm{c},O} + I_{\mathrm{v},G} + md^2)\,\vec{\Omega} + I_{\mathrm{v},G}\,\vec{\omega}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

b) Le système volant+châssis ne subit aucune force extérieure horizontale (en effet les forces de freinage sont internes au système), et donc aucun moment de force vertical. La composante verticale du moment cinétique total (par rapport à n'importe quel point du référentiel) est ainsi constante. Le moment cinétique total par rapport au point O, donné par l'équation (12), est vertical et est donc un vecteur constant au cours du temps. En particulier, on a

$$\vec{L}_{\mathrm{tot},O}(t_1) = \vec{L}_{\mathrm{tot},O}(t_0)\,,$$

ce qui donne

$$(I_{\mathrm{c},O} + I_{\mathrm{v},G} + md^2)\,\vec{\Omega}(t_1) + I_{v,G}\,\underbrace{\vec{\omega}(t_1)}_{=\vec{0}} = (I_{\mathrm{c},O} + I_{\mathrm{v},G} + md^2)\,\underbrace{\vec{\Omega}(t_0)}_{=\vec{0}} + I_{\mathrm{v},G}\,\vec{\omega}_0\,,$$

et donc

$$\vec{\Omega}(t_1) = \frac{I_{\mathrm{v},G}}{I_{\mathrm{c},O} + I_{\mathrm{v},G} + md^2}\,\vec{\omega}_0\,. \tag{13}$$

c) Les forces de freinage sur le châssis sont extérieures au système volant+châssis ; elles exercent un moment vertical qui modifie le moment cinétique total entre t_1 et t_2. Considérons uniquement le volant : entre les temps t_1 et t_2, ce dernier subit son poids vertical vers le bas, et trois autres forces exercées par le châssis : une force de soutien vers le haut (compensant le poids), une force centripète (dans la direction de $\overrightarrow{GO}$), et une force horizontale de direction opposée à $\vec{v}_G$. Cette force s'applique au point G et va le freiner jusqu'à ce qu'il s'immobilise. Aucune de ces forces n'a un moment pas rapport au point G, et donc le moment cinétique du volant par rapport au point G reste constant,

$$\vec{L}_{\mathrm{v},G}(t_2) = \vec{L}_{\mathrm{v},G}(t_1)\,,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{v},G}\big(\vec{\omega}(t_2) + \underbrace{\vec{\Omega}(t_2)}_{=\vec{0}}\big) &= I_{\mathrm{v},G}\big(\underbrace{\vec{\omega}(t_1)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}(t_1)\big)\,, \\ I_{\mathrm{v},G}\,\vec{\omega}(t_2) &= I_{\mathrm{v},G}\,\vec{\Omega}(t_1)\,, \end{aligned}$$

et donc, en utilisant l'équation (13) :

$$\vec{\omega}(t_2) = \vec{\Omega}(t_1) = \frac{I_{\mathrm{v},G}}{I_{\mathrm{c},O} + I_{\mathrm{v},G} + md^2}\,\vec{\omega}_0\,. \tag{14}$$

d) On remarque d'abord que les vitesses de tous les points du volant sont toujours dans le même plan perpendiculaire à Δ et δ ; on en déduit que l'axe de rotation instantané $\Delta'(t)$ est parallèle à ces deux axes, normal au plan du volant. Il suffit donc de trouver la position du point C à l'intersection de $\Delta'(t)$ et du plan horizontal contenant le volant. Ce point C (dont la position dépend du temps) est tel que, à tout instant t, les vitesses de tous les points P du volant s'écrivent :

$$\vec{v}_P = (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \vec{CP}$$

Cette relation est vraie en particulier pour le point G, et comme il est en rotation autour du point fixe O avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ on a aussi $\vec{v}_G = \vec{\Omega} \wedge \vec{OG}$. Ainsi, en exprimant la vitesse du point G de ces deux façons différentes on obtient l'égalité :

$$(\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \vec{CG} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OG} \tag{15}$$

On remarque que C doit appartenir à la droite (OG) pour satisfaire cette égalité. En effet la vitesse $\vec{v}_G$ est toujours perpendiculaire à la fois à $\vec{OG}$ et à $\vec{CG}$, et on a choisi C dans le plan contenant O et G. On introduit maintenant le point O dans le terme de gauche de l'éq. (15) :

$$\begin{aligned} (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge (\vec{CO} + \vec{OG}) &= \vec{\Omega} \wedge \vec{OG} \\ (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \vec{CO} + \vec{\omega} \wedge \vec{OG} &= \vec{0} \\ \vec{\omega} \wedge \vec{OG} &= (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \vec{OC} \end{aligned} \tag{16}$$

Finalement, puisque $\vec{OG}$ et $\vec{OC}$ sont colinéaires, l'éq. (16) se réduit à une relation sur la distance $\overline{OC}$ (avec $\overline{OG} = d > 0$) :

$$\overline{OC} = \frac{\omega}{\omega + \Omega} d \tag{17}$$

En conclusion, l'axe de rotation instantané du volant est vertical et passe par le point C situé sur la droite (OG) à une distance algébrique $\omega d/(\omega + \Omega)$ du point O. Quand $\vec{\Omega}(t) = \vec{0}$, par exemple aux temps t_0 ou t_2, $C = G$ et l'axe de rotation instantané est δ ; quand $\vec{\omega}(t) = \vec{0}$, par exemple au temps t_1, $C = O$ et l'axe de rotation instantané est Δ.
Plus généralement, la figure 1 illustre quelques cas différents selon les normes et directions respectives de $\vec{\omega}$ et $\vec{\Omega}$.

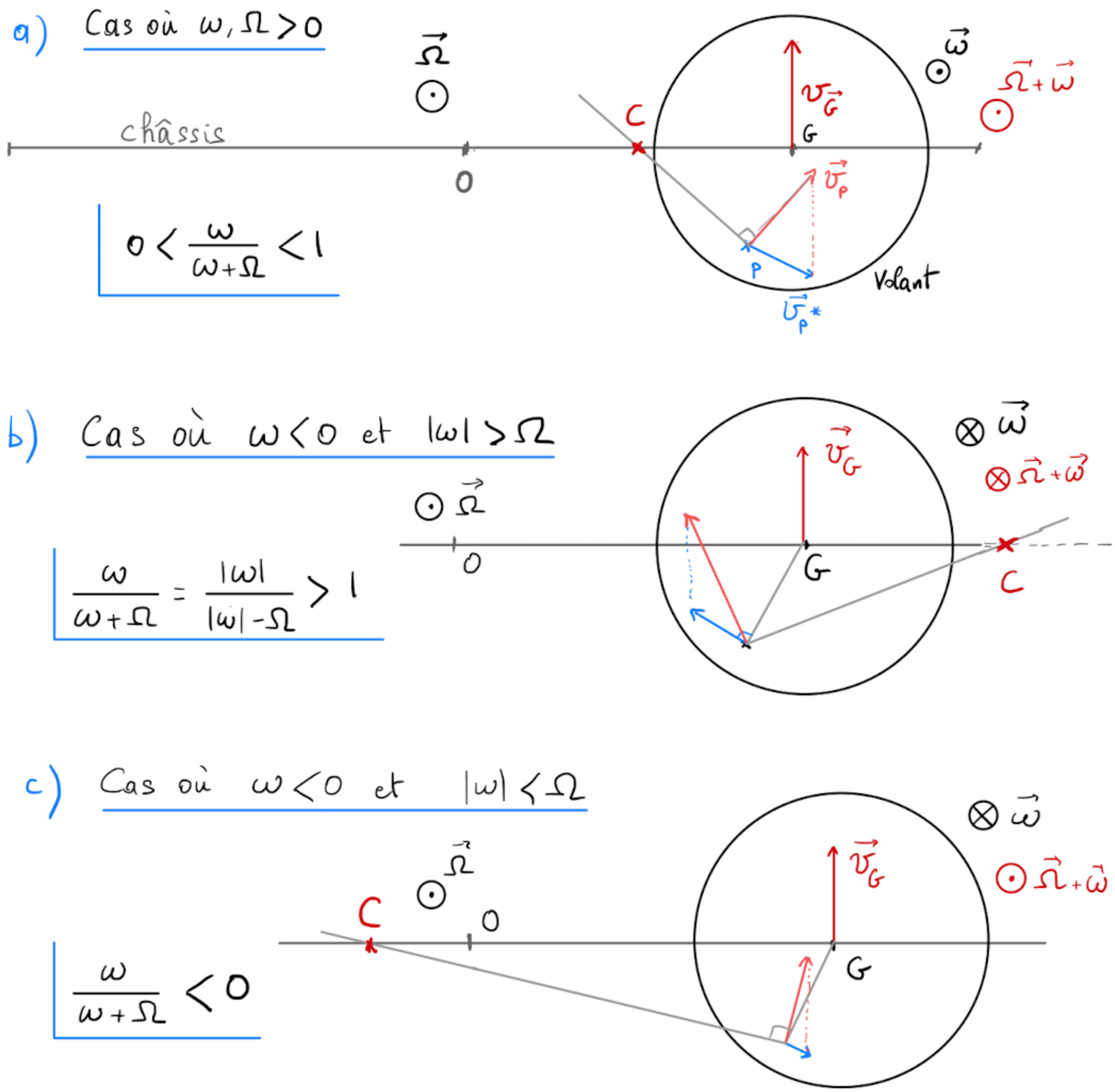


FIGURE 1 – (Illustration de positions possibles pour le centre de rotation instantané. On note $\omega = \vec{\omega} \cdot \hat{e}_z$ et $\Omega = \vec{\Omega} \cdot \hat{e}_z$ avec z pointant vers le haut. Dans chaque cas la vitesse d'un point P du volant est utilisée pour la construction, avec $\vec{v}_P = \vec{v}_G + (\vec{\Omega}+\vec{\omega}) \wedge \vec{GP}$. Par exemple, si $\omega > 0$ et $\Omega > 0$ (a) C se trouve quelque part entre O et G, ce qui correspond bien à $0 < \frac{\omega}{\omega+\Omega} < 1$. Par contre, si $\vec{\omega}$ et $\vec{\Omega}$ sont de sens opposés, C peut se trouver en dehors du segment $[OG]$.

3 Moment d'inertie d'un haltère entraîné par un poids

a) La masse m_3 subit la force de pesanteur $\vec{F} = m_3\vec{g}$ et la force de tension $\vec{T}$ exercée par le câble. L'équation du mouvement de la masse m_3, projetée sur un axe z vertical (pointant vers le bas) est :

$$m_3\ddot{z} = m_3 g - T\,,$$

donc

$$T = m_3(g - \ddot{z})\,, \tag{18}$$

où T est la norme du vecteur $\vec{T}$.
A son autre extrémité, le câble exerce une force horizontale $\vec{T}'$, de norme T, sur le système formé de l'haltère et de son axe de rotation vertical. Il s'agit de la seule force sur ce système qui ait un moment non nul (ou non compensé) par rapport au centre C de l'haltère, situé sur l'axe de rotation. Le théorème du moment cinétique par rapport à C s'écrit :

$$\frac{d\vec{L_C}}{dt} = \vec{M}_{C,ext} = \vec{r} \wedge \vec{T}'\,, \tag{19}$$

où $\vec{L} = I\vec{\omega}$ est le moment cinétique du système et $I = (m_1 + m_2)R$ son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation vertical. Comme cet axe est un axe principal d'inertie par le point C, $\vec{L}$ est parallèle à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$, selon cet axe.
Soit θ l'angle de rotation. La vitesse angulaire de l'haltère vaut $\omega = \dot{\theta}$. L'accélération de la masse m_3 vaut $\ddot{z} = r\ddot{\theta}$.

En projetant le théorème du moment cinétique sur l'axe z puis en éliminant T, on obtient :

$$I\ddot{\theta} = rT = m_3 r g - m_3 r^2\ddot{\theta}\,,$$

c'est à dire :

$$\ddot{\theta} = \frac{m_3 r g}{m_3 r^2 + I}\,, \tag{20}$$

et donc

$$\ddot{\theta} = \frac{m_3 r g}{m_3 r^2 + (m_1 + m_2)R^2}\,. \tag{21}$$

b) Si $m_1 = m_2 = m_3 = m$ et si $r \ll R$, on a l'approximation suivante :

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{rg}{r^2 + 2R^2} \approx \frac{rg}{2R^2} \tag{22}$$

En utilisant la vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}(0) = 0$ on a :

$$\dot{\theta}(t) = \frac{rg}{2R^2}t \tag{23}$$

et

$$\theta(t) = \frac{rg}{4R^2}t^2 + \theta_0\,. \tag{24}$$

Si R est multiplié par 3, la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ est divisée par $3^2 = 9$.
Une chute de la masse m_3 d'une hauteur h correspond à une rotation d'un angle $\theta - \theta_0 = h/r$.

Le temps de chute t_h satisfait alors à :

$$h/r = \frac{rg}{4R} t_h \tag{25}$$

soit :

$$t_h = \sqrt{\frac{4R}{rg} h} = \frac{2R}{r} \sqrt{\frac{h}{g}} \,. \tag{26}$$

Si R est multiplié par 3, le temps de chute est multiplié par 3.