6 Différentiabilité

Thm : Soient f, g deux fonctions dérivables sur $]a,b[$ avec $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$. Si :

- $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$
- $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{\text{existe}}{=} \ell \in \mathbb{R}$

Alors $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad \left(= \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$

Rmq (généralisation de B-H.) : on a un Thm. analogue pour $\lim_{x\to b-}$, $\lim_{x\to -\infty}$, $\lim_{x\to +\infty}$ et pour les formes indéterminées $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (au lieu de $\frac{0}{0}$).

Exemples :

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{la fct}^\circ\text{ est paire}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} \overset{B.H\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0_+} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{B.H\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0_+} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2}$.

(iii) $\lim_{x\to 0_+} x\, \mathrm{Log}(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\mathrm{Log}(x)}{1/x} \overset{B.H\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0_+} -x = 0$.

(iv) $\lim_{x\to 0_+} x^x = \lim_{x\to 0_+} \exp(x\,\mathrm{Log}(x))$

exp est continue en 0 $\;= \exp\left(\lim_{x\to 0_+} x\,\mathrm{Log}(x)\right) = \exp(0) = 1$.

Si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$,
$a^b = [\exp(\log(a))]^b$
$= \exp(b\,\mathrm{Log}(a))$

(v) Soit $c \in \mathbb{R}$. bien défini pour x assez grand

$\lim_{x\to +\infty} x \cdot \mathrm{Log}\left(1+\frac{c}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{Log}\left(1+\frac{c}{x}\right)}{1/x}$

$\overset{B.H\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{c}{x}}\left(-\frac{c}{x^2}\right)}{-1/x^2}$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{c}{1+\frac{c}{x}} = c$.

(vi) Soit $c \in \mathbb{R}$.

$\underbrace{\lim_{n\to +\infty} \left(1+\frac{c}{n}\right)^n}_{\text{limite d'une suite}} = \underbrace{\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{c}{x}\right)^x}_{\text{limite d'une fct°}} = \lim_{x\to +\infty} \exp\left(x\,\mathrm{Log}\left(1+\frac{c}{x}\right)\right)$

exp est continue $\;= \exp\left(\lim_{x\to +\infty} x\,\mathrm{Log}\left(1+\frac{c}{x}\right)\right)$

Exemple (v) $\;= \exp(c)$

⚠ La réciproque de BH est fausse en général.

On a : $\lim_{x\to 0_+} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0_+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (Thm des gendarmes)

Mais $\lim_{x\to 0_+} \frac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1}$ n'existe pas.

(le thm de B.H ne s'applique pas.)

<u>Preuve de B.H</u>

(i) f, g dérivables sur $]a,b[$ donc continues sur $]a,b[$.

(ii) On prolonge par continuité f et g $(f(a) = g(a) = 0)$.

Alors f, g sont continues $[a,b[$. → première hypothèse du thm.

(iii) Soit (x_n) une suite telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $x_n \in]a,b[$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) Par le thm des accroissements finis généralisés :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists u_n \in]a, x_n[$ tel que $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)} = \dfrac{f'(u_n)}{g'(u_n)}$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f'(u_n)}{g'(u_n)} = \ell$ car $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} u_n = a \\ \lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell. \end{cases}$

deuxième hypothèse du théorème

Donc $\displaystyle\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. car (x_n) est une suite arbitraire. ∎

6.9 Continuité de la fonction dérivée

Exemple : Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Pour $x \neq 0$: $f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) + x^2 (-\frac{1}{x^2}) \cos(\frac{1}{x})$

$= \underbrace{2x \sin(\tfrac{1}{x})} - \underbrace{\cos(\tfrac{1}{x})}$

Pour $x = 0$: $f'(0) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h})}{h}$

$= \displaystyle\lim_{h\to 0} h \sin(\tfrac{1}{h}) = 0.$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. (En particulier f est continue.)

⊛ Mais f' n'est pas continue en $x_0 = 0$.

En effet, pour $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f'(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n)$

$= \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi n} * 0 - 1$

$= -1 \neq 0 = f'(0).$

⊛ En fait, "$\displaystyle\lim_{x\to x_0} f'(x)$" n'existe même pas.

En effet, pour $u_n = \frac{1}{2\pi n + \pi}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f'(u_n) = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{1}{2\pi n+\pi} \sin(2\pi n+\pi) - \cos(2\pi n+\pi)$

$= \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 - (-1) = 1.$

Thm (Continuité de la dérivée) : Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[\subset D$, tel que f est continue sur $]a,b[$ et dérivable sur $]a,b[\setminus \{x_0\}$.
S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell$,
alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

Preuve :

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \overset{B.H\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \to 0+} \frac{f'(x_0+h)}{1} \overset{\text{hypothèse du thm}}{=} \ell$$

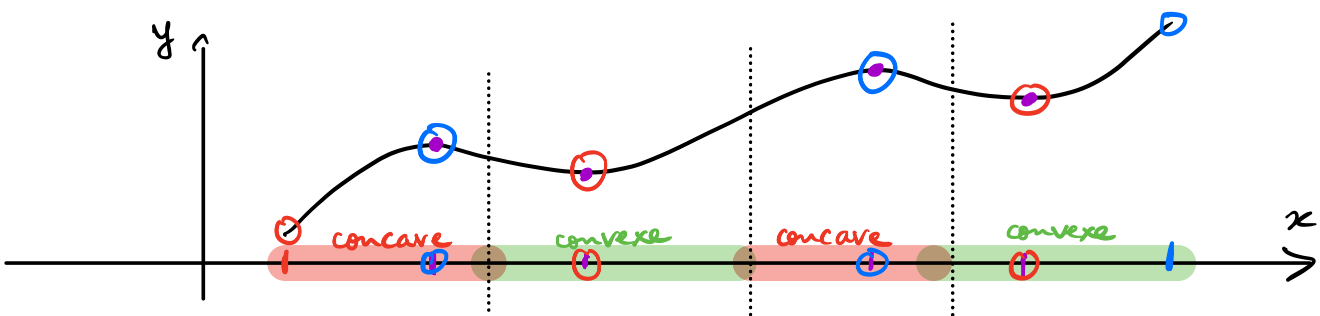
$$\lim_{h \to 0_-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0_-} \frac{f'(x_0+h)}{1} = \ell.$$

Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$. ∎

6.10 Etude des fonctions

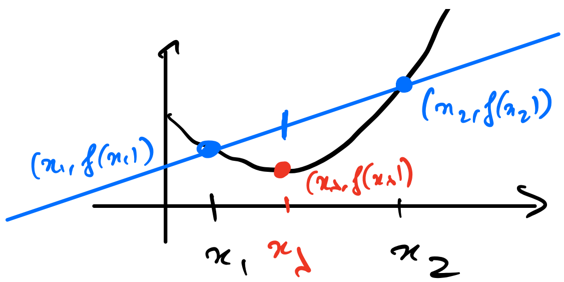
Dans cette section, $f : D \to \mathbb{R}$, $I = [a,b] \subset D$, $a < b$, $I_0 \subset I$ un sous-intervalle de I.

6.10.1 Définitions



- Convexe : f est convexe sur I_0 si

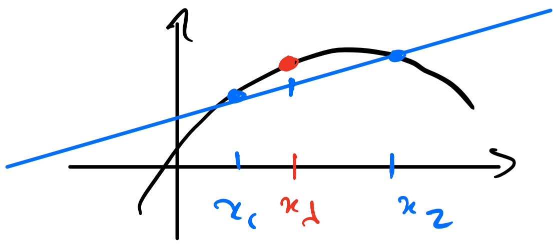
$$\forall x_1, x_2 \in I_0, \ (x_1 < x_2) \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big(\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}_{=: x_\lambda}\big) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$



" Le graphe de f est au-dessous de ses cordes".

- Concave : f est concave sur I_0 si

$\forall x_1, x_2 \in I_0$ $(x_1 < x_2)$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}_{=: x_\lambda}) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.



- Un point $x_0 \in I$ est un :
  - point stationnaire (ou critique) si $f'(x_0) = 0$
  - maximum local si $f(x) \leq f(x_0)$ pour "$x \in I$ proche de x_0"
    (c-à-d si $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \varepsilon$, on a $f(x) \leq f(x_0)$.)
  - minimum local si $f(x) \geqslant f(x_0)$ pour "$x \in I$ proche de x_0".

fin cours 24/11