Moment cinétique d'un solide

- Par rapport à un point A appartenant au solide

$$\vec{L}_A = \sum_\alpha \vec{AP}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha \vec{AP}_\alpha \wedge m_\alpha \left(\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}_\alpha\right)$$

$$= \vec{AG} \wedge M\vec{v}_A + \sum_\alpha m_\alpha \vec{AP}_\alpha \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{AP}_\alpha\right)$$

$$= \vec{AG} \wedge M\vec{v}_A + \sum_\alpha m_\alpha \left[AP_\alpha^2 \vec{\omega} - \left(\vec{AP}_\alpha \cdot \vec{\omega}\right) \vec{AP}_\alpha\right]$$

Zero si *A*=*G* ou
vitesse de *A* nulle

- Par rapport à un point quelconque, utiliser le théorème de transfert
- si le solide est continu, il faut remplacer les sommes par des intégrales

Tenseur d'inertie

- Moment cinétique par rapport au centre de masse G :

$$\vec{L}_G = \sum_\alpha m_\alpha \left[GP_\alpha^2 \vec{\omega} - \left(\vec{GP}_\alpha \cdot \vec{\omega} \right) \vec{GP}_\alpha \right]$$

- En coordonnées cartésiennes, dans un repère orthonormé quelconque

$$\begin{aligned} L_{G,i} &= \sum_\alpha m_\alpha \left[GP_\alpha^2 \omega_i - \left(\sum_j GP_{\alpha j} \omega_j \right) GP_{\alpha i} \right] \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \left[\sum_j GP_\alpha^2 \delta_{ij} \omega_j - \left(GP_{\alpha j} \omega_j \right) GP_{\alpha i} \right] \\ &= \sum_{\alpha,j} m_\alpha \left[GP_\alpha^2 \delta_{ij} - \left(GP_{\alpha j} \right) \left(GP_{\alpha i} \right) \right] \omega_j \\ &= \sum_{\alpha,j} \left(\tilde{I}_G \right)_{ij} \omega_j \end{aligned}$$

Eléments d'une matrice
3x3
symétrique
définie positive

$$\boxed{\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega}}$$

(vecteur = matrice . vecteur)

Tenseur d'inertie au centre de masse

Tenseur d'inertie

- Par rapport à un point A appartenant au solide:

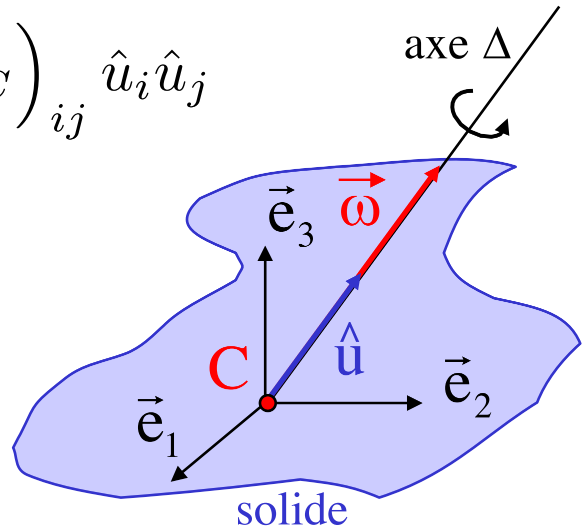
Tenseur d'inertie au point A

$$\vec{L}_A = \vec{AG} \wedge M\vec{v}_A + \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}$$

$$\left(\tilde{I}_A\right)_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[AP_\alpha^2 \delta_{ij} - \left(AP_\alpha\right)_i \left(AP_\alpha\right)_j\right]$$

- Moment d'inertie I_Δ par rapport à un axe fixe Δ quelconque de direction passant par un point C fixe: $\hat{u} = \vec{\omega}/\omega$

$$I_\Delta = \frac{L_\Delta}{\omega} = \frac{\vec{L}_C}{\omega} \cdot \hat{u} = \left(\tilde{I}_C \cdot \hat{u}\right) \cdot \hat{u} = \sum_{i,j} \left(\tilde{I}_C\right)_{ij} \hat{u}_i \hat{u}_j$$



- Moment d'inertie I_k par rapport à l'axe k du repère:

$$\hat{u} = \hat{e}_k \implies u_i = \delta_{ik} \implies I_k = \sum_{i,j} \left(\tilde{I}_C\right)_{ij} \delta_{ik}\delta_{jk} = \left(\tilde{I}_C\right)_{kk}$$

Les éléments diagonaux de la matrice représentant le tenseur d'inertie au point C sont les moments d'inertie par rapport aux axes du repère choisi au point C

Axes principaux d'inertie

*Pour tout point C d'un solide, il est toujours possible de choisir un repère dans lequel la matrice représentant le tenseur d'inertie soit **diagonale***

- Théorème d'algèbre linéaire (matrice symétrique-> diagonalisable)
- Définitions:
  - Repère d'inertie : repère dans lequel la matrice est diagonale
  - Axes principaux d'inertie : axes du repère d'inertie
  - Moments d'inertie principaux : moments par rapport aux axes principaux (éléments diagonaux dans le repère d'inertie)
- Dans le repère d'inertie:

$$\vec{L}_C = \tilde{I}_C \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

- Axe fixe passant par C:

$$\boxed{\vec{L}_C = I_\Delta \vec{\omega} \Leftrightarrow \Delta \text{ est un axe principal d'inertie}}$$

Recherche des axes principaux d’inertie

- Il s’agit de diagonaliser la matrice représentant le tenseur d’inertie :

$$\tilde{I}_C \cdot \vec{\omega} = I\vec{\omega} \implies \begin{vmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{vmatrix} = 0$$

- Les trois valeurs propres sont les trois moments d’inertie principaux
- Les trois vecteurs propres unitaires représentent les directions des trois axes principaux d’inertie

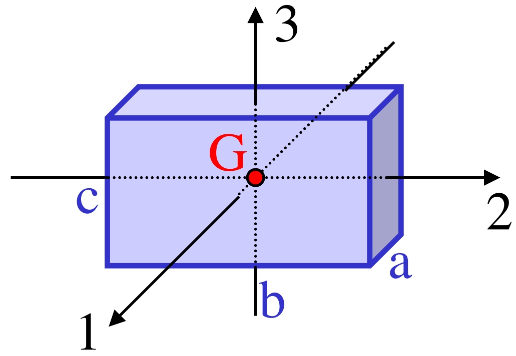
- Pour un solide symétrique:
  - Tout axe de symétrie passant par C est un axe principal d’inertie au point C
  - L’axe passant par C et perpendiculaire à un plan de symétrie est un axe principal d’inertie
  - Tout axe passant par C et perpendiculaire à un axe de symétrie d’ordre supérieur à trois est un axe principal d’inertie.

Cas particuliers simples

- Parallélépipède rectangle plein

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{12} M \left(b^2 + c^2\right) \\ I_2 &= \tfrac{1}{12} M \left(a^2 + c^2\right) \\ I_3 &= \tfrac{1}{12} M \left(b^2 + a^2\right) \end{aligned}$$

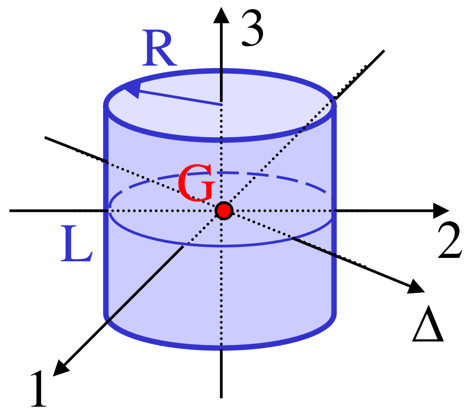
"Toupie asymétrique"
seulement 3 axes principaux passant par G



- Cylindre
  - Plein $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M L^2$

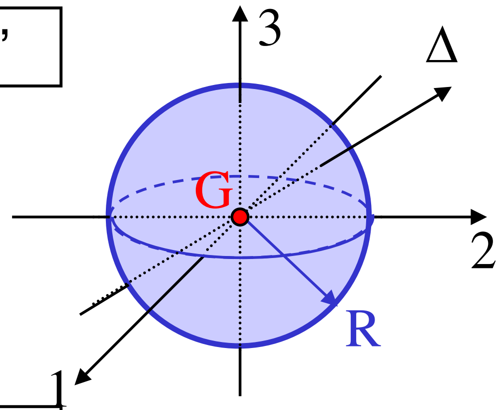
    $I_3 = \frac{1}{2} M R^2$
  - Vide $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{12} M L^2$

    $I_3 = M R^2$



"Toupie symétrique"

- Sphère
  - Pleine $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \dfrac{2}{5} M R^2$
  - Vide $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \dfrac{2}{3} M R^2$



"Toupie sphérique"

Tenseur d'inertie

- Comparaison entre la dynamique de rotation et de translation

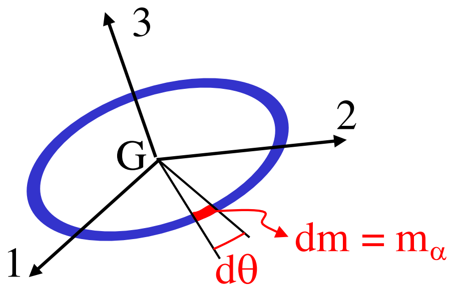
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} \qquad \text{avec} \qquad \vec{p} = M\vec{v}_G$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} \qquad \text{avec} \qquad \vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega}$$

- *« Le tenseur d'inertie est aux rotations ce que la masse est aux translations »*

Exemple de calcul d'un tenseur d'inertie

- Roue modélisée par un anneau mince de rayon *R*, de masse *M* :



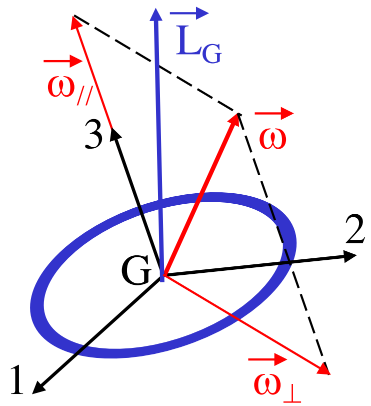
$$\left(\tilde{I}_G\right)_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[GP_\alpha^2 \delta_{ij} - (GP_\alpha)_i \, (GP_\alpha)_j\right]$$

$$= \int_{\text{roue}} \left(R^2\delta_{ij} - x_i x_j\right) dm = MR^2\delta_{ij} - \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} x_i x_j d\theta$$

$$x_1 = R\cos\theta \quad x_2 = R\sin\theta \quad x_3 = 0$$

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{pmatrix}$$

- Roue en rotation autour d'un axe quelconque passent par *G* :



$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} = \tilde{I}_G \cdot (\vec{\omega}_\parallel + \vec{\omega}_\perp)$$

$$\vec{L}_G = MR^2\left(\frac{1}{2}\vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_\parallel\right)$$

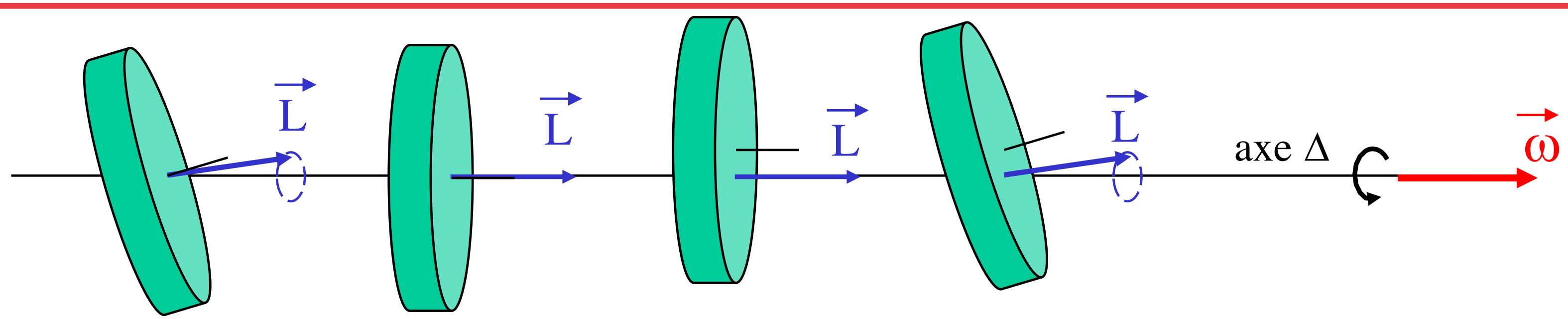
$\vec{L}$ *n'est pas parallèle a* $\vec{\omega}$ *mais dans le plan défini par* $\vec{\omega}$ *et l'axe de la roue*

Application: équilibrage d'un solide en rotation

- Dans beaucoup de situations, il est nécessaire qu'un solide en rotation soit équilibré:
  - Roues de voiture, turbines, hélices, arbres de transmission
- Pour un axe de rotation : Δ

Solide équilibré statiquement $\Leftrightarrow G \in \Delta$

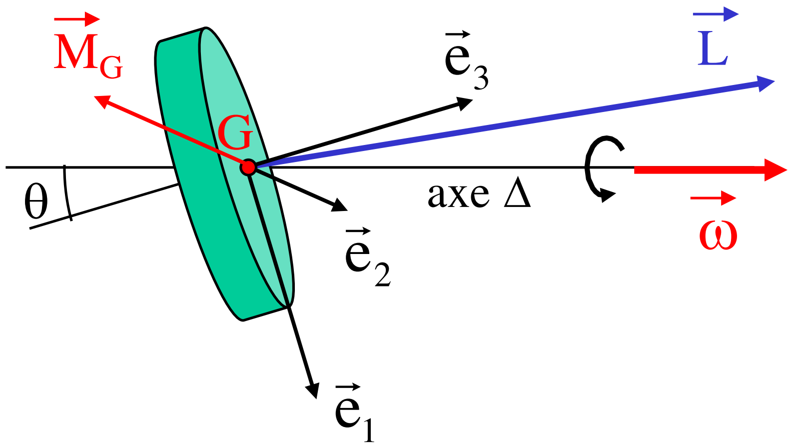
Solide équilibré dynamiquement $\Leftrightarrow \Delta$ est un axe principal d'inertie



  - Si le solide n'est pas équilibré dynamiquement, le moment cinétique précesse autour de Δ , et un moment de force perpendiculaire à Δ doit être appliqué pour garder Δ fixe: vibrations, usure…

Exemple: Roue voilée

- L'axe de rotation fait un angle avec l'axe de symétrie
- On choisi un repère d'inertie en mouvement lié à la roue
  - Origine au centre de masse
  - Axe 3 selon l'axe de la roue
  - Axe 1 dans le plan défini par l'axe de la roue et l'axe de rotation



  - Dans le repère d'inertie:

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} I_\perp & 0 & 0 \\ 0 & I_\perp & 0 \\ 0 & 0 & I_\parallel \end{pmatrix} \qquad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \sin\theta \\ 0 \\ \omega\cos\theta \end{pmatrix}$$

Exemple: Roue voilée

- Moment cinétique

$$\vec{L}_G = I_\perp \omega \sin\theta \hat{e}_1 + I_{||}\omega \cos\theta \hat{e}_3$$

- Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = I_\perp \omega \sin\theta \left(\vec{\omega} \wedge \hat{e}_1\right) + I_{||}\omega \cos\theta \left(\vec{\omega} \wedge \hat{e}_3\right)$$

$$= I_\perp \omega \sin\theta \left(\omega \cos\theta \hat{e}_2\right) + I_{||}\omega \cos\theta \left(-\omega \sin\theta \hat{e}_2\right)$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \left(I_\perp - I_{||}\right)\omega^2 \sin\theta \cos\theta \hat{e}_2 = \vec{M}_G$$

Le moment de force est nul si: $\theta = 0$ $\quad \theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad I_\perp = I_{||}$

Théorème de Steiner

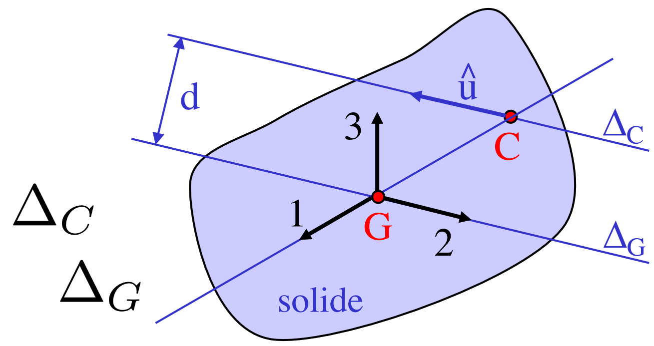
- Pour un point *A* quelconque du solide:

$$
\begin{aligned}
\left(\tilde{I}_A\right)_{ij} &= \sum_\alpha m_\alpha \left[AP_\alpha^2 \delta_{ij} - (AP_\alpha)_i (AP_\alpha)_j\right] \\
&= \sum_\alpha m_\alpha \left[\left(\vec{AG} + \vec{GP}_\alpha\right)^2 \delta_{ij} - ((AG)_i + (GP_\alpha)_i)\left((AG)_j + (GP_\alpha)_j\right)\right] \\
&= \sum_\alpha m_\alpha \left[\left(\vec{AG}^2 + \vec{GP}_\alpha^2 + 2\vec{AG}\cdot\vec{GP}_\alpha\right)\delta_{ij}\right. \\
&\qquad \left. - (AG)_i (AG)_j - (GP_\alpha)_i (GP_\alpha)_j - (AG)_i (GP_\alpha)_j - (GP_\alpha)_i (AG)_j\right] \\
&= \sum_\alpha m_\alpha \left[\vec{GP}_\alpha^2 \delta_{ij} - (GP_\alpha)_i (GP_\alpha)_j\right] + \sum_\alpha m_\alpha \left[\vec{AG}^2 \delta_{ij} - (AG)_i (AG)_j\right]
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\left(\tilde{I}_A\right)_{ij} = \left(\tilde{I}_G\right)_{ij} + M\left[\vec{AG}^2 \delta_{ij} - (AG)_i (AG)_j\right]}
$$

Masse ponctuelle localisée en A

Exemple: changement d'axe



- Formule de Steiner pour les moments d'inertie:
  - axe de direction û passant par un point quelconque
  - axe de direction û passant par le centre de masse *G*
  - distance entre les deux axes *d*

$$I_{\Delta_C} = \sum_{i,j} \left(\tilde{I_C}\right)_{ij} u_i u_j$$

$$= \sum_{i,j} \left(\tilde{I_G}\right)_{ij} u_i u_j + \sum_{i,j} M \left[\vec{CG}^2 u_i u_j \delta_{ij} - (CG)_i u_i (CG)_j u_j\right]$$

$$I_{\Delta,C} = I_{\Delta,G} + M\left[\vec{CG}^2 - \left(\vec{CG}\cdot\hat{u}\right)^2\right]$$

$$\boxed{I_{\Delta_C} = I_{\Delta_G} + Md^2}$$

- Axes principaux d'inertie:
  - Si Δ_G et *CG* sont des axes principaux d'inertie au point *G*, alors Δ_C et *CG* sont des axes principaux d'inertie au point *C*