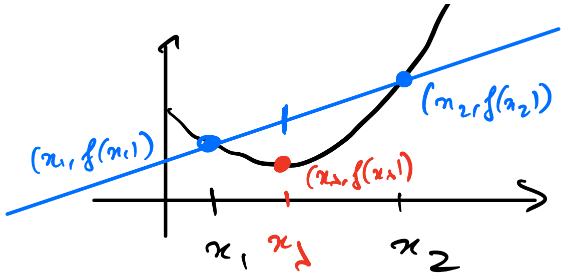
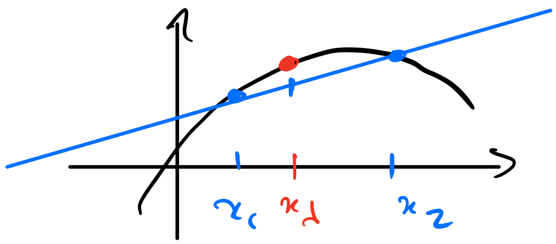


" Le graphe de f est au-dessous de ses cordes ".

- **Concave** : f est concave sur I_0 si

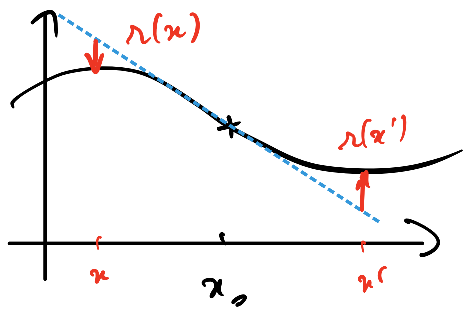
$$\forall x_1, x_2 \in I_0 \; (x_1 < x_2), \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2}_{=: x_\lambda}) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$



- Un point $x_0 \in I$ est un :
  - <u>point stationnaire (ou critique)</u> si $f'(x_0) = 0$
  - <u>maximum local</u> si $f(x) \leq f(x_0)$ pour "$x \in I$ proche de x_0"
    (c-à-d si $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \varepsilon$, on a $f(x) \leq f(x_0)$.)
  - <u>minimum local</u> si $f(x) \geq f(x_0)$ pour "$x \in I$ proche de x_0".

fin cours
↓ 24/11

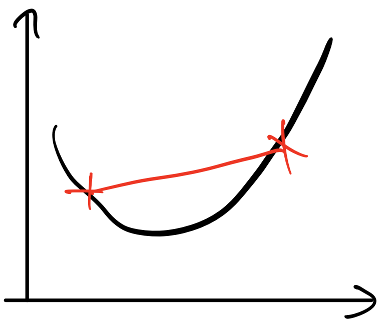
  - <u>maximum (global)</u> si $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in D(f)$
  - <u>minimum (global)</u> si $f(x) \geq f(x_0)$ ——
  - <u>extremum [local]</u> si x_0 est un maximum [local] ou est un minimum [local]
  - <u>point d'inflexion</u> si f est différentiable en x_0 et il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour



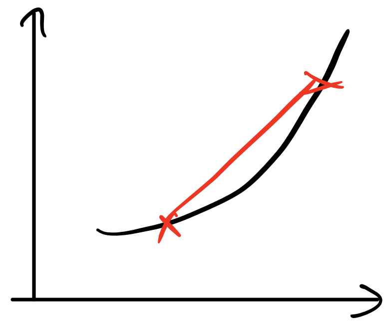
$r(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$,

$r(x)\cdot(x-x_0)$ est de même signe pour tout $x \in \,]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\, \setminus \{x_0\}$.

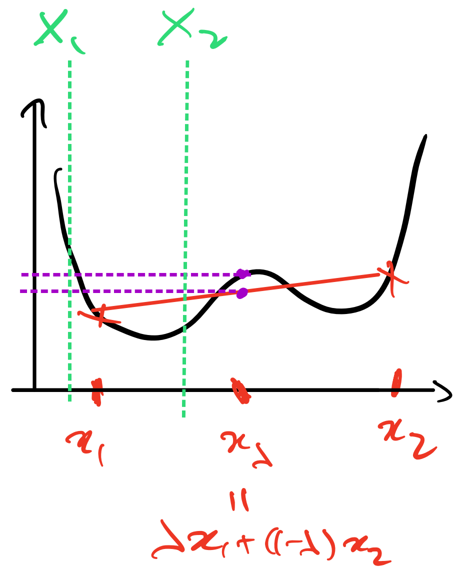
<u>Remarque</u> :



convexe



convexe



⇝ pas convexe sur $D(f)$

⇝ convexe sur $[X_1, X_2]$.

<u>6.10.2 Critères</u>

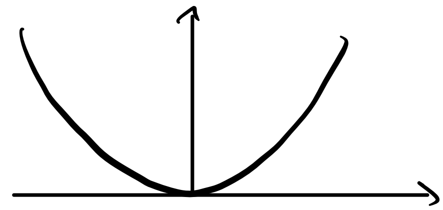
<u>Thm</u> : (critère suffisant de convexité)
Si f' est définie et croissante sur I_0 (en particulier si $f'' \geq 0$ sur I_0), alors f est convexe sur I_0.

<u>Thm</u> : (critère suffisant de concavité)
Si f' est définie et décroissante sur I_0 (en particulier si $f'' \leq 0$ sur I_0), alors f est concave sur I_0.

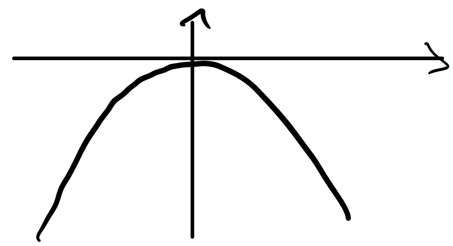
Remarque : si f est convexe sur I_0, alors $-f$ est concave sur I_0.

Exemples :

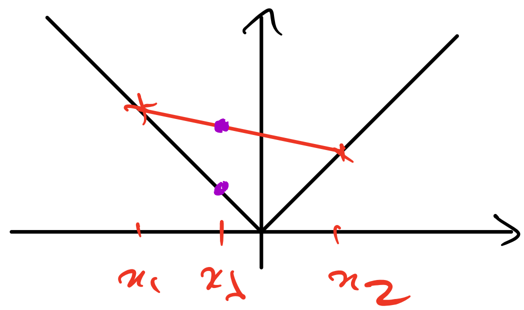
- $f(x) = x^2$ convexe sur $\mathbb{R}$.



- $f(x) = -x^2$ concave sur $\mathbb{R}$



- $f(x) = |x|$ est bien convexe sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas dérivable en 0. Le critère suffisant ne s'applique pas.



thm : (extremum local)

(i) Si f admet un extremum local en $x_0 \in]a,b[$ et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

(ii) Si $f'(x_0) = 0$ en $x_0 \in [a,b]$, et si $f''(x_0) < 0$, alors f admet un maximum local en x_0.

(iii) Si $f'(x_0) = 0$ en $x_0 \in [a,b]$, et si $f''(x_0) > 0$, alors f admet un minimum local en x_0.

C.N pour P : $P \Rightarrow xxx$

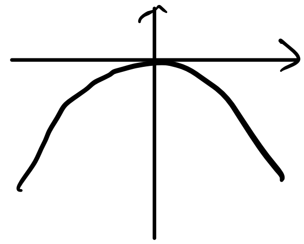
C.S pour P : $xxx \Rightarrow P$

Exemples :

- $f(x) = -x^2$

  $x_0 = 0$

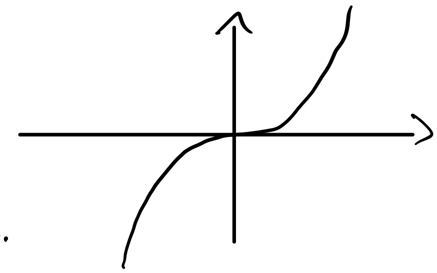
  $\rightsquigarrow$ (i) (ii) s'applique



- $f(x) = x^3$

  $x_0 = 0$

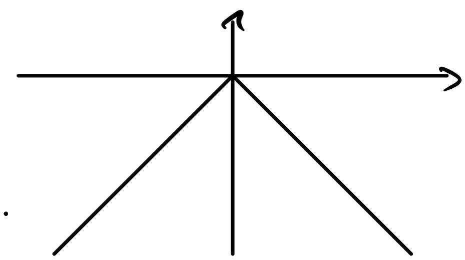
  $\rightsquigarrow$ $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ Le thm ne s'applique pas.



- $f(x) = -|x|$

  $x_0 = 0$

  $\rightsquigarrow$ Le thm ne s'applique pas.



Remarque importante :

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, les extremas sont parmis les points suivants :

— les points où f n'est pas dérivable ;

— les points stationnaires, i.e., x_0 telsque $f'(x_0)=0$

— les bords de l'intervalle ($x_0 = a$ ou $x_0 = b$).

Thm : (points d'inflexion)

Soit f une fonction trois fois dérivable sur $]a,b[$.

C.N (i) Si f admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a,b[$, alors $f''(x_0) = 0$.

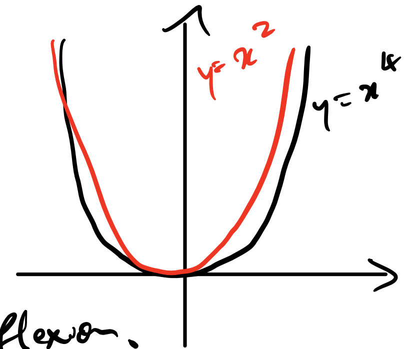
C.S (ii) Si $f''(x_0) = 0$ et $f'''(x_0) \neq 0$, alors x_0 est un point d'inflexion de f.

Exemples : $\boxtimes$ $f(x) = x^4$

$x_0 = 0$

$\rightsquigarrow$ $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$

donc le thm ne s'applique pas.



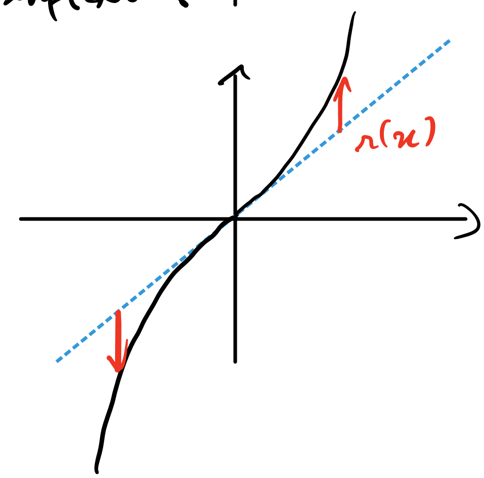
De fait, $x_0 = 0$ n'est pas un point d'inflexion.

$\boxtimes$ $f(x) = x + x^3$

$x_0 = 0$

$\rightsquigarrow$ $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$

donc par (ii), x_0 est un point d'inflexion.



6.10.3 Discuter du graphe d'une fonction

Que peut-on dire des propriétés d'une fonction donnée ?

Regardons un exemple :

$$f(x) = |2x-1| - x^2 + 1 \quad , \quad D(f) = [-3, 3]$$

$$= \begin{cases} 2 - 2x - x^2 & \text{si } x \in [-3, \frac{1}{2}] =: I_1 \\ 2x - x^2 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 3] =: I_2 \end{cases}$$

① **Domaine** : $D(f) = [-3, 3]$ par définition

② **Symétries** : (paire, impaire, périodique ?)

$\rightsquigarrow$ f n'a pas de symétries

③ Zéros de f :

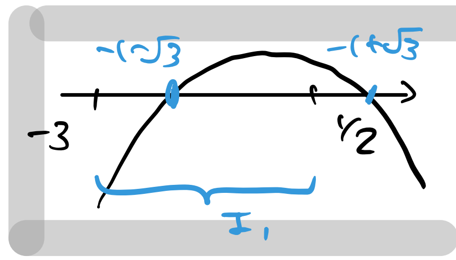
$-f(x)$

- Sur I_1 : $x^2+2x-2=0 \iff x=-1\pm\sqrt{3}$

  $\rightsquigarrow$ le seul zéro de f dans I_1 est $-1-\sqrt{3} \simeq -2{,}7$

- Sur I_2 : $2x-x^2=0 \iff x=0$ ou $x=2$.

  $\rightsquigarrow$ le seul zéro de f dans I_2 est 2.



④ Continuité de f :

f est continue sur son intervalle de définition $D(f)$.

⑤ Dérivabilité de f : (calcul de f' et f'' et leur domaine)

f est dérivable sur I_1 et sur I_2, mais pas sur $I_1 \cup I_2$

$\rightsquigarrow$ sur I_1 : $f'(x) = -2-2x$, $f''(x) = -2$

$\rightsquigarrow$ sur I_2 : $f'(x) = 2-2x$, $f''(x) = -2$

⑥ Points particuliers : (extrema, non-différentiabilité, points stationnaires)

(i) f n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$

car $\left\{\begin{array}{l} f'_d(\frac{1}{2}) = 1 \\ f'_g(\frac{1}{2}) = -3 \end{array}\right. \neq$ | $f(\frac{1}{2}) = 3/4$

(ii) Points où $f'=0$:

$\rightsquigarrow$ sur I_1 : $f'(x) = -2-2x=0 \iff x=-1$; | $f(-1)=3$, $f''(-1) = -2$.

Donc -1 est un maximum local

$\rightsquigarrow$ sur I_2 : $f'(x) = 2-2x = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$ | $f(+1) = 1$, $f''(1) = -2$.

Donc 1 est un maximum local.

(iii) <u>Valeurs aux bords</u> : $f(-3) = -1$

$f(3) = -3$

Donc (par la "remarque importante"),

$\max\limits_{x \in D(f)} f(x) = 3$ (atteint en $x=-1$)

$\min\limits_{x \in D(f)} f(x) = -3$ (atteint en $x=3$).

⑦ <u>Monotonie, convexité, concavité</u>

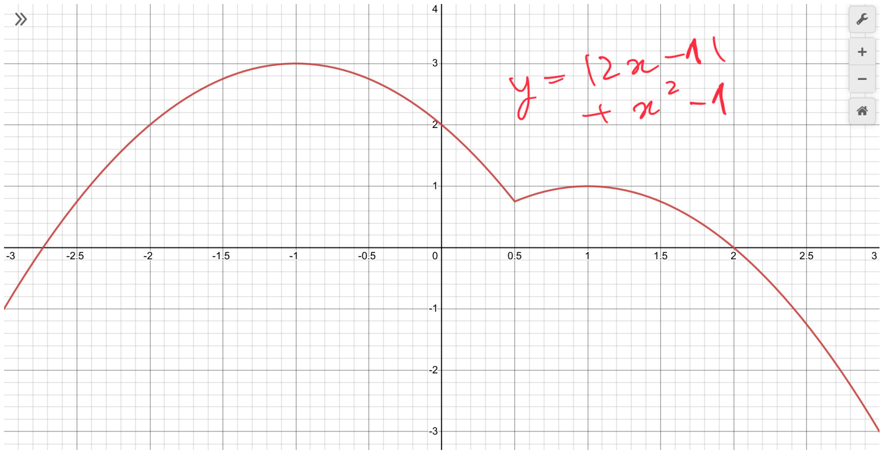
x	-3		-1		$\frac{1}{2}$		1		3
f'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\|\|$	$\nearrow$		$\searrow$	

x	-3		$1/2$		3
f''		$-$	$\|\|$	$-$	
f		concave		concave	

<u>Rq</u> : f est concave sur I_1 et concave sur I_2, <u>mais</u> pas sur $I_1 \cup I_2$

⑧ <u>Asymptotes</u> (pas pertinent ici)

⑨ <u>Tracer le graphe</u>

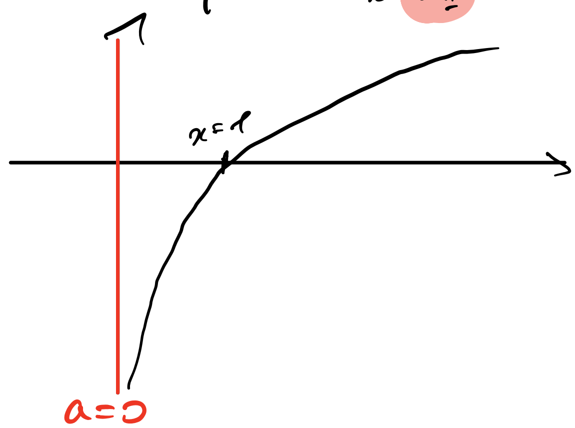


6.10.5 Asymptotes

(i) Asymptote verticale en $a \in \mathbb{R}$: quand $\lim_{x \to a_\pm} f(x) = \pm\infty$.

<u>Exemple</u> : $f(x) = \text{Log}(x)$

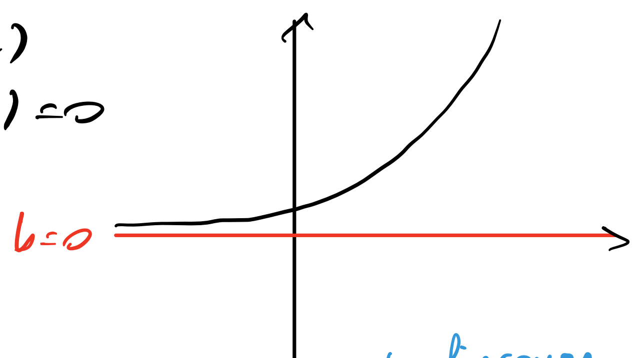
$\lim_{x \to 0_+} \text{Log}(x) = -\infty$.



(ii) Asymptote horizontale en $b \in \mathbb{R}$: quand $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.

<u>Exemple</u> : $f(x) = \exp(x)$

$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$



fin cours 28/11