Corrigé du Minitest 4

Feu d'artifice balistique sur la lune (12 points)

a) (4 points au total)
On définit un repère orthonormé droit $Oxyz$ avec l'origine O sur le canon, l'axe z vertical vers le haut et l'axe x tel que $\vec{v}_0$ soit dans le plan xz. Le projectile est en mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{g} = -g\hat{e}_z$. Compte tenu des conditions initiales, sa vitesse verticale et sa position verticale valent $\boxed{\text{1 point pour } \dot{z}(t) \text{ et } z(t)}_{\mathrm{A}}$

$$\dot{z}(t) = v_0 \sin\alpha - gt \quad \text{et} \quad z(t) = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2}\, gt^2\,. \tag{1}$$

L'altitude maximale est atteinte lorsque $\dot{z} = 0$, c'est-à-dire au temps

$$t_{\mathrm{expl}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\,, \;\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{B}} \tag{2}$$

et vaut

$$z_{\mathrm{expl}} = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}\,. \tag{3}$$

Au moment de l'explosion, le projectile a une vitesse horizontale (puisqu'il est au sommet de sa trajectoire). Comme tous les fragments ont des vitesses horizontales par rapport au projectile, leurs vitesses absolues sont également horizontales au temps t_{expl}. Ils gardent donc une altitude commune $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{C}}$, qui évolue selon

$$z(t) = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2}\, gt^2 \qquad \text{ou} \qquad z(t) = z_{\mathrm{expl}} - \frac{1}{2} g(t - t_{\mathrm{expl}})^2\,, \tag{4}$$

et ils atteignent tous $z = 0$ au même instant

$$t_{\mathrm{sol}} = t_{\mathrm{expl}} + \sqrt{\frac{2 z_{\mathrm{expl}}}{g}} = 2\, t_{\mathrm{expl}} = \frac{2\, v_0 \sin\alpha}{g}\,. \;\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{D}} \tag{5}$$

Solution alternative : On arrive au même résultat par le raisonnement suivant. Les fragments ont tous des vitesses verticales nulles au moment de l'explosion. $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{C}}$ Il tombent donc sur le sol au même instant que ne l'aurait fait le projectile s'il n'avait pas explosé, soit $t_{\mathrm{sol}} = 2\, t_{\mathrm{expl}}$. $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{D}}$

b) (5 points au total)
Dans ce problème, le système est le projectile, qui se transforme en 1000 fragments par l'action de forces internes à l'instant de son explosion. La seule force externe au système est la pesanteur, dont la résultante sur les 1000 fragments est

$$\vec{P} = \sum_{i}^{1000} m_i \vec{g} = M\vec{g} = -Mg\hat{e}_z\,. \tag{6}$$

Par le théorème du centre de masse,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -Mg\hat{e}_z \,, \tag{7}$$

le centre de masse du système suit donc un mouvement balistique identique à celui du projectile s'il n'avait pas explosé. Le poids étant vertical, le système est donc isolé dans le plan horizontal et la composante horizontale de la quantité de mouvement du système est conservée. On en déduit que le centre de masse G du système, qui est également le centre du cercle décrit par les fragments, a un mouvement rectiligne uniforme dans le plan horizontal. Le centre du cercle décrit par les fragments au temps t_{sol} se trouve à la position du centre de masse du système au temps t_{sol}, c'est-à-dire à l'emplacement où le projectile serait tombé s'il n'avait pas explosé en vol $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{E}}$, soit

$$x(t_{\text{sol}}) = v_0 \cos\alpha \, t_{\text{sol}} = 2\sin\alpha\cos\alpha\,\frac{v_0^2}{g}\ \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{F}} = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g} \,. \tag{8}$$

Dans le référentiel du centre de masse du projectile l'énergie cinétique totale des fragments juste après l'explosion vaut W et les vitesses des fragments au moment de l'explosion sont horizontales de norme commune u. On a donc

$$W = \sum_{i=1}^{1000} \frac{1}{2} m_i u^2 = \frac{1}{2} M u^2 \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{\frac{2W}{M}} \,.\ \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{G}} \tag{9}$$

En projection dans le plan horizontal, les fragments se déplacent tous à vitesse constante u par rapport au centre de masse. Ils sont donc en tout temps $t \geq t_{\text{expl}}$ disposés sur un cercle horizontal centré en G dont le rayon croît et vaut $u(t - t_{\text{expl}})$ $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{H}}$. Le rayon du cercle au temps t_{sol} où les fragments arrivent au sol vaut ainsi

$$R = u\,(t_{\text{sol}} - t_{\text{expl}}) = u\,t_{\text{expl}} = \frac{v_0\sin\alpha}{g}\sqrt{\frac{2W}{M}} \,.\ \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{I}} \tag{10}$$

c) (3 points au total)

Si le canon reçoit un fragment, c'est qu'il est sur le cercle, donc $x(t_{\text{sol}}) = R$, $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{J}}$ c'est-à-dire

$$W = 2Mv_0^2\cos^2\alpha \,.\ \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{K}} \tag{11}$$

L'énergie cinétique initiale du projectile valant $E_{\text{cin},0} = \frac{1}{2}Mv_0^2$, le rapport cherché vaut

$$\frac{W}{E_{\text{cin},0}} = 4\cos^2\alpha \,.\ \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{L}} \tag{12}$$