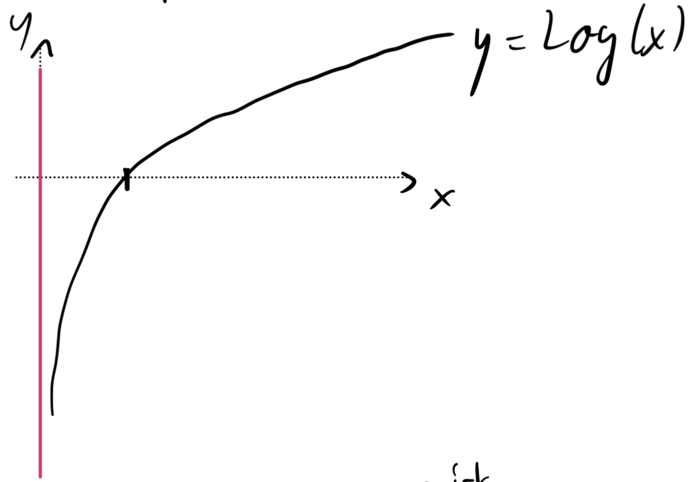
6.10.5 Asymptotes

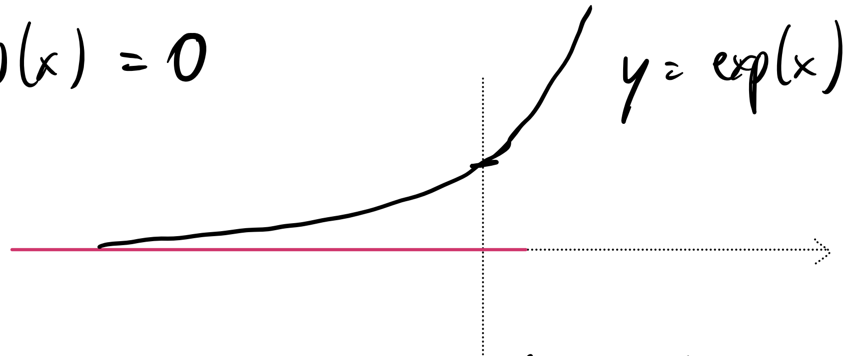
(i) Asymptote verticale en $a \in \mathbb{R}$: quand $\lim_{x \to a\pm} f(x) = \pm\infty$

ex : $\lim_{x \to 0+} \text{Log}(x) = -\infty$



(ii) Asymptote horizontale : quand $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \overset{\text{existe}}{=} b \in \mathbb{R}$

Ex : $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$



(iii) Asymptote oblique : quand $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$
$a, b \in \mathbb{R}$

↳ D'abord calculer $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{?}{=} a$, puis $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] \overset{?}{=} b$.

Ex : $f(x) = \frac{x + x^5}{1 + x^2 + x^4}$ en $+\infty$?

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \underbrace{1}_{a}$ puis $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 1 \cdot x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^3}{1 + x^2 + x^4} = \underbrace{0}_{b}$

⇝ Donc $y = a \cdot x + b = x$ est asymptote de f en $+\infty$.

fin 28/11 ↓

Chapitre 7. Développements limités et séries de Taylor

7.1 Développements limité (DL)

Def: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n (DL_n) en x_0 si il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + \dots + a_n \cdot (x-x_0)^n + (x-x_0)^n \cdot \varepsilon(x)$$

et $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Thm (Formule de Taylor): Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$.
Si $f \in C^n(I)$ (Rappel : $C^n(I)$ = ensemble des fonctions n fois continûment dérivables sur I) alors f admet un DL_n en x_0, donné par :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \cdot \varepsilon(x)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\substack{\text{Polynôme de Taylor} \\ \text{d'ordre } n \\ P_n(x)}} + \underbrace{(x-x_0)^n \cdot \varepsilon(x)}_{\substack{\text{Terme de reste} \\ r_n(x)}}$$

où $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Si de plus $f^{(n)}$ est dérivable alors $\exists\, u \in]x_0, x[$ t.q. $\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-x_0)$

c'est à dire $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Exemple : Prenons $f(x) = \sin(x)$ et $x_0 = 0$.

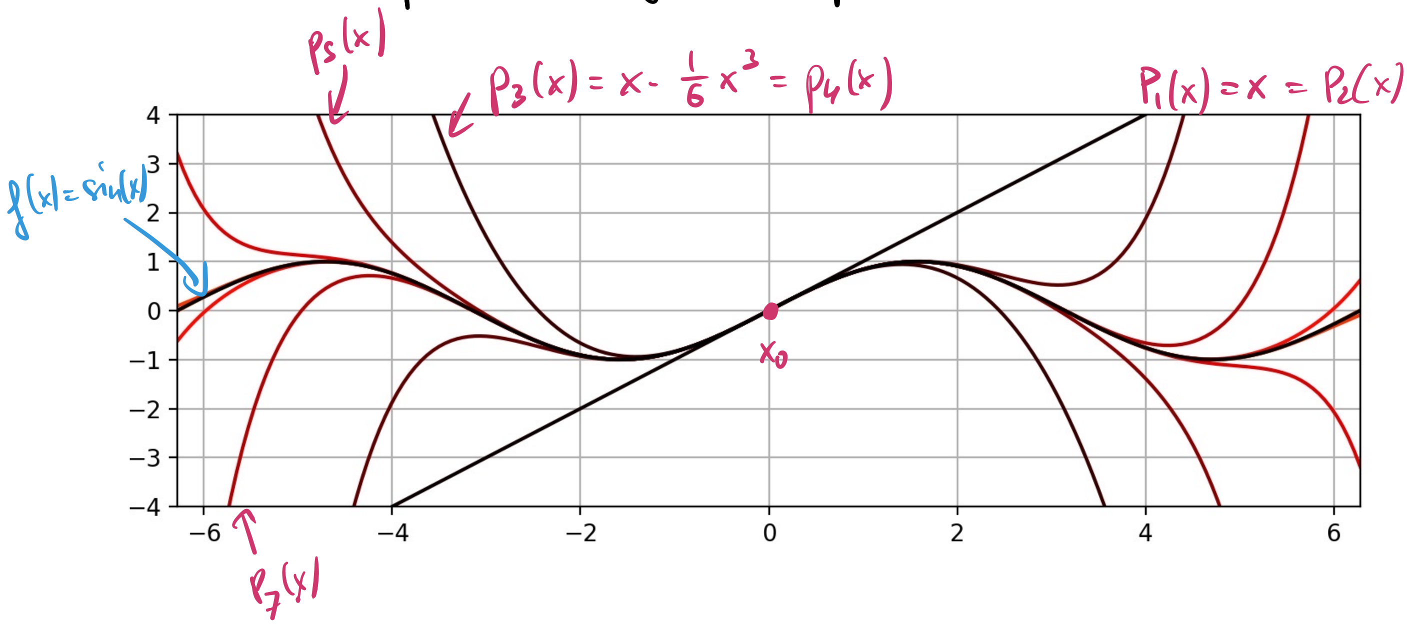
$a_0 = \frac{1}{0!} f(0) = \frac{\sin(0)}{1} = 0$ $\qquad P_0(x) = 0$

$a_1 = \frac{1}{1!} f'(0) = \frac{\cos(0)}{1} = 1$ $\qquad P_1(x) = 0 + 1 \cdot x = x$

$a_2 = \frac{1}{2!} f''(0) = \frac{-\sin(0)}{2} = 0$ $\qquad P_2(x) = 0 + x + 0 \cdot x^2 = x$

$a_3 = \frac{1}{3!} f'''(0) = \frac{-\cos(0)}{6} = \frac{-1}{6}$ $\qquad P_3(x) = x - \frac{1}{6} x^3$

(Les p_n sont impairs car f est impaire).



Ex : le DL_3 de sin en 0 est : $\begin{cases} \sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x) \\ \text{avec } \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$

7.2 DL usuels

Par un calcul analogue à celui fait pour sin, on a les DL suivants en $x_0 = 0$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \cdot \varepsilon(x) \qquad (x \neq 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \cdot \varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \cdot \varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \cdot \varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \cdot \varepsilon(x)$$

logarithme Nepérien

$$\mathrm{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \cdot \varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + x^n \cdot \varepsilon(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

où $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Vérifier que l'on retrouve la bonne formule pour $\alpha = 1$

⚠ À connaître

Exemples d'application au calcul de limites

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + x \cdot \varepsilon(x)}{x} = \lim_{x \to 0} 1 + \varepsilon(x) = 1$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)\right)}{x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} + \varepsilon(x) = \frac{1}{2}$$

3) $f(x) = \frac{\exp\left(x^4 \cos\left(e^{1/x^2}\right)\right) - 1}{x}$ en $x_0 = 0$?

Soit $g(x) = x^4 \cos\left(e^{1/x^2}\right)$. On a $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ (Thm des gendarmes)

On a $\exp(u) = 1 + u + u \cdot \varepsilon(u)$

Donc $\exp(g(x)) = 1 + g(x) + g(x) \cdot \overbrace{\varepsilon(g(x))}^{\tilde{\varepsilon}(x)}$

Donc $f(x) = \dfrac{\exp(g(x)) - 1}{x}$

$$= \frac{g(x) + g(x)\cdot\hat{\varepsilon}(x)}{x} = x^3 \cos(e^{1/x^2})(1 + \hat{\varepsilon}(x))$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ (Thm. des gendarmes).

7.3 Composition et produit de DL

1) DL$_4$ de $\dfrac{1}{\cos(x)}$ en 0. $\dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{1}{1 + (\cos(x) - 1)} = f(g(x))$

où $\begin{cases} g(x) = \cos(x) - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^4\cdot\varepsilon(x) \\ f(u) = \dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + u^2\cdot\tilde{\varepsilon}(u) \end{cases}$

Donc
$$\frac{1}{\cos(x)} = f(g(x)) = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\cdot\varepsilon(x)\right)$$
$$+ \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\cdot\varepsilon(x)\right)^2$$
$$+ \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\cdot\varepsilon(x)\right)^2 \cdot \underbrace{\tilde{\varepsilon}(u)}_{\tilde{\tilde{\varepsilon}}(x)}$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^4\cdot\varepsilon(x)$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^4\cdot\varepsilon(x)$$

- DL$_3$ de tangente en 0 :

on aurait pu s'arrêter au DL$_2$ de cos

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\cdot\varepsilon(x)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \underbrace{\frac{5}{24}x^4}_{} + x^4\cdot\tilde{\varepsilon}(x)\right)$$
$$= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\cdot\tilde{\varepsilon}(x)$$
$$= x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\cdot\tilde{\varepsilon}(x)$$

N.B. On aurait pu le retrouver à l'aide de la formule de Taylor :

$$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = \cos(x)^{-2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -2(-\sin(x))\cos(x)^{-3} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 2\cos(x)^{-2} + 2\sin(x)\cdot(-3)\cdot(-\sin x)\cdot\cos(x)^{-4} \Rightarrow f'''(0) = 2$$

Donc par la formule de Taylor :

$$\tan(x) = 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + x^3\cdot\varepsilon(x)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\cdot\varepsilon(x) \leftarrow \text{cohérent avec le calcul ci-dessus.}$$

fin cours 01/12