Corrigé 12 : dynamique des solides

1 Tenseur d'inertie

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ passant par un point A du solide est

$$I_\Delta = \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2 \,,$$

d_α étant la distance de la masse m_α à l'axe Δ.
Le tenseur d'inertie par rapport à A est quant à lui donné par

$$\tilde{I}_A = \left(\tilde{I}_{A,ij}\right) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

avec

$$\tilde{I}_{A,ij} = \sum_\alpha m_\alpha\left(||\vec{r}_\alpha||^2\delta_{ij} - r_{\alpha i}r_{\alpha j}\right) = \begin{cases} \sum_\alpha m_\alpha\left(||\vec{r}_\alpha||^2 - r_{\alpha i}^2\right) & \text{si } i = j \\ \sum_\alpha m_\alpha\left(-r_{\alpha i}r_{\alpha j}\right) & \text{si } i \neq j \,. \end{cases}$$

1. Par rapport à l'axe $(A, \hat{\varepsilon}_1)$:

$$I_{A,\hat{\varepsilon}_1} = m(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2) = m(0 + b^2 + h^2 + b^2) = 2mb^2 + mh^2 \,.$$

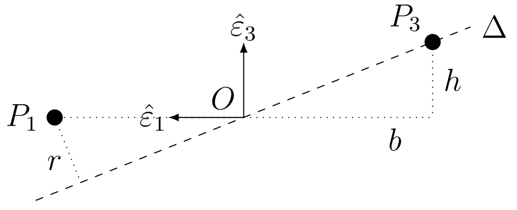
2. Par rapport à l'axe $(A, \hat{\varepsilon}_2)$:

$$I_{A,\hat{\varepsilon}_2} = m(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2) = m(b^2 + 0 + (b^2 + h^2) + 0) = 2mb^2 + mh^2 \,.$$

3. Par rapport à l'axe $(A, \hat{\varepsilon}_3)$:

$$I_{A,\hat{\varepsilon}_3} = m(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2) = m(b^2 + b^2 + b^2 + b^2) = 4mb^2 \,.$$

4. Par rapport à l'axe $\Delta = (A, P_3)$:



$$\frac{r}{b} = \frac{h}{\sqrt{b^2 + h^2}} \Rightarrow r^2 = \frac{b^2h^2}{b^2 + h^2}$$

$$I_{A,\Delta} = m(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2) = m(r^2 + b^2 + 0 + b^2) = \frac{mb^2}{b^2 + h^2}(2b^2 + 3h^2) \,.$$

5. Le tenseur d'inertie du solide par rapport à A est donné par les termes diagonaux

$$\begin{aligned}
I_{A,11} &= \sum_\alpha m_\alpha \Big(||\vec{r}_\alpha||^2 - r_{\alpha 1} r_{\alpha 1} \Big) \\
&= m\Big((b^2 - b^2) + (b^2 - 0) + (b^2 + h^2 - b^2) + (b^2 - 0) \Big) \\
&= m(2b^2 + h^2) = I_{A,\hat{\varepsilon}_1} \\
I_{A,22} &= \sum_\alpha m_\alpha \Big(||\vec{r}_\alpha||^2 - r_{\alpha 2} r_{\alpha 2} \Big) \\
&= m\Big((b^2 - 0) + (b^2 - b^2) + (b^2 + h^2 - 0) + (b^2 - b^2) \Big) \\
&= m(2b^2 + h^2) = I_{A,\hat{\varepsilon}_2} \\
I_{A,33} &= \sum_\alpha m_\alpha \Big(||\vec{r}_\alpha||^2 - r_{\alpha 3} r_{\alpha 3} \Big) \\
&= m\Big((b^2 - 0) + (b^2 - 0) + (b^2 + h^2 - h^2) + (b^2 - 0) \Big) \\
&= 4mb^2 = I_{A,\hat{\varepsilon}_3}
\end{aligned}$$

et non diagonaux

$$\begin{aligned}
I_{A,12} = I_{A,21} &= \sum_\alpha m_\alpha \Big(-r_{\alpha 1} r_{\alpha 2} \Big) = m\Big(0 + 0 + 0 + 0 \Big) = 0 \\
I_{A,13} = I_{A,31} &= \sum_\alpha m_\alpha \Big(-r_{\alpha 1} r_{\alpha 3} \Big) = m\Big(0 + 0 + bh + 0 \Big) = mbh \\
I_{A,23} = I_{A,32} &= \sum_\alpha m_\alpha \Big(-r_{\alpha 2} r_{\alpha 3} \Big) = m\Big(0 + 0 + 0 + 0 \Big) = 0\,,
\end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{I}_A = m \begin{pmatrix} 2b^2 + h^2 & 0 & bh \\ 0 & 2b^2 + h^2 & 0 \\ bh & 0 & 4b^2 \end{pmatrix} .$$

Remarque : on vérifie que l'on retrouve bien le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ

$$I_{A,\Delta} = \hat{\delta} \cdot \tilde{I}_A \hat{\delta}\,,$$

$\hat{\delta}$ étant le vecteur directeur unitaire de Δ :

$$\hat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + h^2}} \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ h \end{pmatrix} .$$

Remarque : lorsque $h = 0$, les quatre masses sont coplanaires et disposées symétriquement par rapport à A. Le repère $(A, \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\varepsilon}_3)$ choisi reflète cette symétrie et le tenseur d'inertie $\tilde{I}_A$ est diagonal :

$$\tilde{I}_A = m \begin{pmatrix} 2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4b^2 \end{pmatrix} .$$

2 Énergie cinétique d'un ballon roulant sur une table

Suivant le cours, l'énergie cinétique d'un solide de masse m en rotation instantanée autour d'un point A quelconque du solide est donnée par :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m \vec{v}_A^2 + m \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i (\tilde{I}_A)_{ij} \omega_j \,.$$

Si Δ est un axe principal du solide passant par A, et que $\vec{\omega}$ est parallèle à Δ, cette relation devient

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m \vec{v}_A^2 + m \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}) + \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 \,,$$

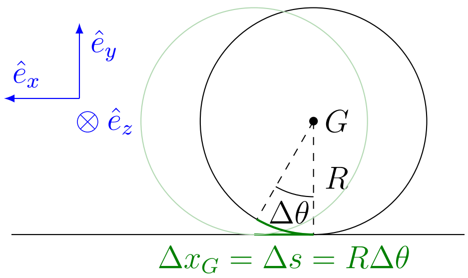
où I_Δ est le moment d'inertie du solide par rapport à Δ.

1. Ici, le point A est le centre de masse G : ainsi $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG} = \vec{0}$, et l'axe Δ est horizontal et orthogonal à $\vec{v}_G$. Suivant le cours, le moment d'inertie d'une boule creuse est

$$I_\Delta = \frac{2}{3} m R^2 \,.$$

D'autre part, la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ et la vitesse $\vec{v}_G$ sont liées par

$$v_G = R\omega \,.$$



En effet, si, pendant Δt, le cylindre Les variations temporelles (dérivées) tourne d'un angle $\Delta\theta$ dans le sens donné par $\hat{e}_z$, il "enroule" sur le sol une longueur

$$\Delta s = R\Delta\theta$$

et le centre de masse du cylindre se déplace de

$$\Delta x_G = \Delta s = R\Delta\theta$$

dans le sens donné par $\hat{e}_x$.
donnent alors

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x_G}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad v_G = R\omega \,.$$

Il vient donc finalement

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{3} m R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{3} m v_G^2 = \frac{5}{6} m v_G^2 \,.$$

2. Ici, le point A est le point de contact C : ainsi $\vec{v}_C = \vec{0}$ (condition de roulement sans glissement), $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CG} = R\hat{e}_y$, et l'axe Δ est horizontal et orthogonal à $\vec{v}_G$. Connaissant le moment d'inertie d'une boule creuse par rapport à un axe

passant par son centre de masse, on obtient le moment d'inertie par rapport à Δ en exploitant le théorème de Steiner :

$$I_\Delta = \frac{2}{3}mR^2 + mR^2 = \frac{5}{3}mR^2 \,.$$

Comme pour le point (a), la vitesse angulaire est liée à la vitesse du centre de masse par

$$v_G = R\omega \,.$$

Il vient donc finalement

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}m\vec{v}_C^2 + m\vec{v}_C \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG}) + \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}\frac{5}{3}mR^2\omega^2 = \frac{5}{6}mv_G^2 \,.$$

Remarquons que la relation entre ω et v_G s'obtient également de la relation entre les vitesses de G et de C (deux points du solide) :

$$\vec{v}_G = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG} = \vec{0} + R\omega\hat{e}_x \,.$$