

Energie cinétique d'un solide

- Pour un point A quelconque du solide

$$\begin{aligned}
 E_{\text{cin}} &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge A\vec{P}_{\alpha} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 + M \vec{v}_A \cdot \left(\vec{\omega} \wedge A\vec{G} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\vec{\omega} \wedge A\vec{P}_{\alpha} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\vec{\omega} \wedge A\vec{P}_{\alpha} \right)^2 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\vec{\omega}^2 A\vec{P}_{\alpha}^2 - (\vec{\omega} \cdot A\vec{P}_{\alpha})^2 \right] \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\sum_{ij} \omega_i \omega_j \delta_{ij} A\vec{P}_{\alpha}^2 - \omega_i \omega_j (AP_{\alpha})_i (AP_{\alpha})_j \right] \\
 &= \sum_{ij} \omega_i \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[A\vec{P}_{\alpha}^2 \delta_{ij} - (AP_{\alpha})_i (AP_{\alpha})_j \right] \\
 &= \sum_{ij} \omega_i \omega_j \left(\tilde{I}_A \right)_{ij} = \vec{\omega} \cdot \left(\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega} \right)
 \end{aligned}$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 + M \vec{v}_A \cdot \left(\vec{\omega} \wedge A\vec{G} \right) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left(\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega} \right)$$

rotation selon un
axe fixe $\frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2$

↑
0 si A est fixe ou A = G

Exemple: roulement sans glissement sur une pente

- Energie cinétique (au point A)

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I_{A,y} \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{G,y} + MR^2) \omega^2$$

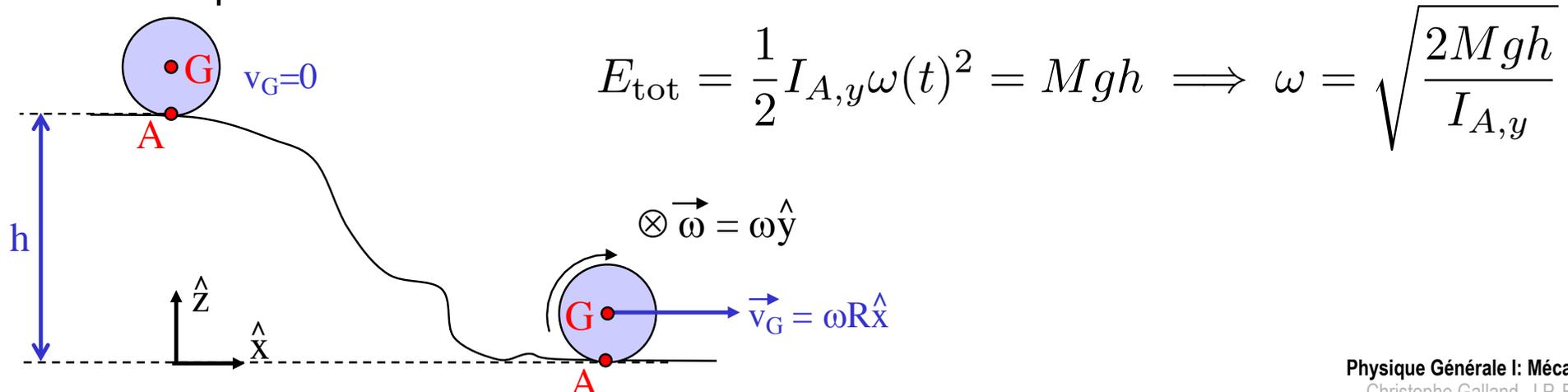
- Energie cinétique (en G)

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I_{G,y} \omega^2 + \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 = \frac{1}{2} I_{G,y} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

- Energie mécanique totale:

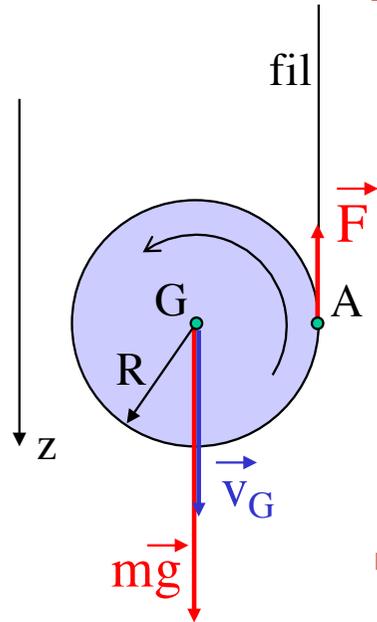
$$E_{\text{tot}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} I_{A,y} \omega(t)^2 + Mgz_G(t) = \text{Const}$$

- Exemple:



$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} I_{A,y} \omega(t)^2 = Mgh \implies \omega = \sqrt{\frac{2Mgh}{I_{A,y}}}$$

Exemple: le yoyo



- Equations du mouvement:

$$\vec{M}_G = \frac{d\vec{L}_G}{dt} \implies RF = I_G \dot{\omega} = \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{a_G}{R} \right) \implies F = \frac{1}{2} m a_G$$

$$\vec{F} + M\vec{g} = m\vec{a}_G \implies F = mg - m a_G$$

$$a_G = \frac{2}{3} g$$

- Conditions initiales à $t = 0$: $v_G = 0, z = 0$

- Solution: $v_G = \sqrt{2a_G z} = \sqrt{\frac{4}{3} g z}$

- Le poids est conservatif et F ne travaille pas : on utilise la conservation de E

$$K = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) (v_G / R)^2 = \frac{3}{4} m v_G^2$$

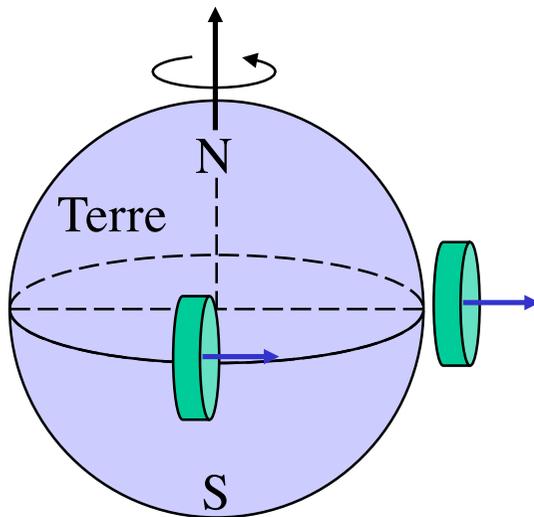
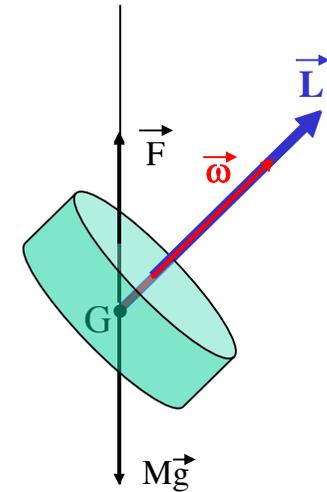
$$E = 0 = \frac{3}{4} m v_G^2 - m g z \implies v_G = \sqrt{\frac{4}{3} g z}$$

Gyroscope

- Solide « suspendu » à son centre de masse G , libre d'adopter n'importe quelle orientation, en rotation autour d'un axe de symétrie (fixe par rapport au solide) tel que $\vec{L}_G = I_\Delta \vec{\omega}$
- Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G = 0 \implies \vec{L}_G = \text{const}$$

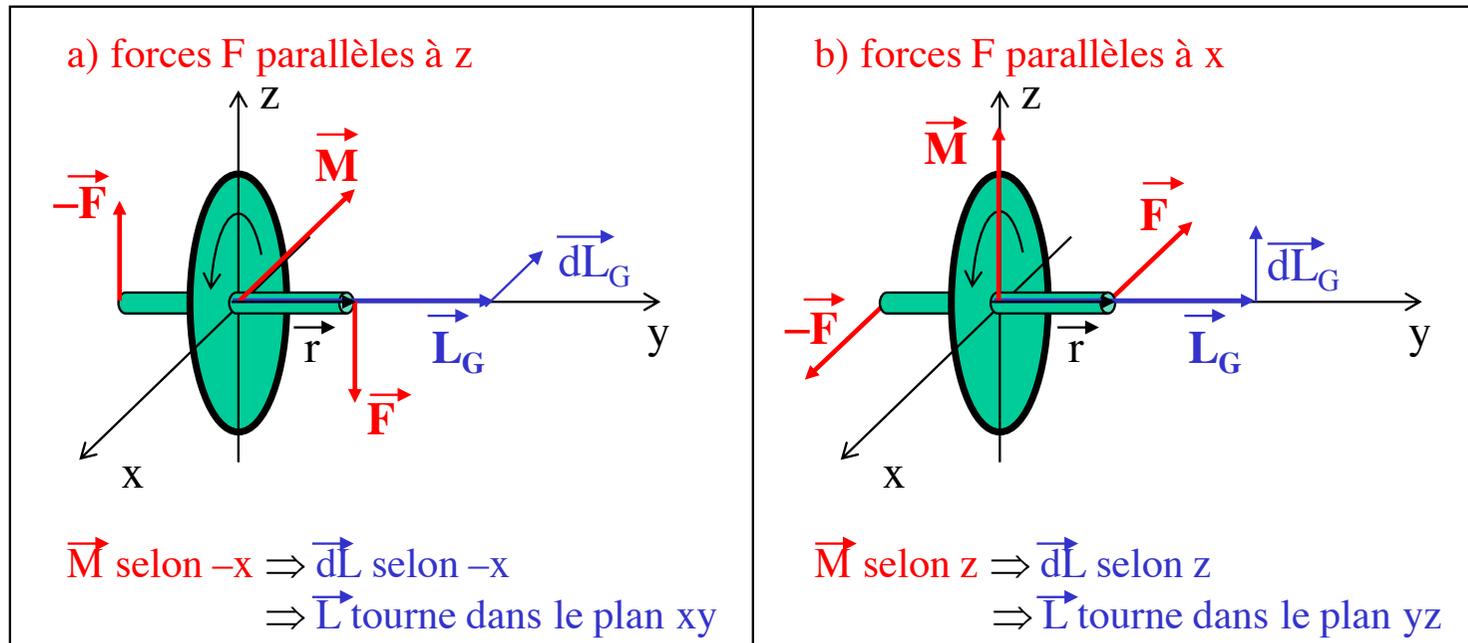
$$\vec{\omega} = \text{const}$$



- Gyroscope à l'équateur: axe de rotation horizontal selon la direction est-ouest
- 6 heures plus tard l'axe est devenu vertical à cause du mouvement de la terre

Effets gyroscopiques

- Roue de vélo en rotation autour de son axe de symétrie: $\vec{L}_G \parallel \vec{\omega}$
- On veut changer la direction de l'axe de rotation : comment faut-il exercer le couple de la force pour que l'axe tourne autour de Ox ?

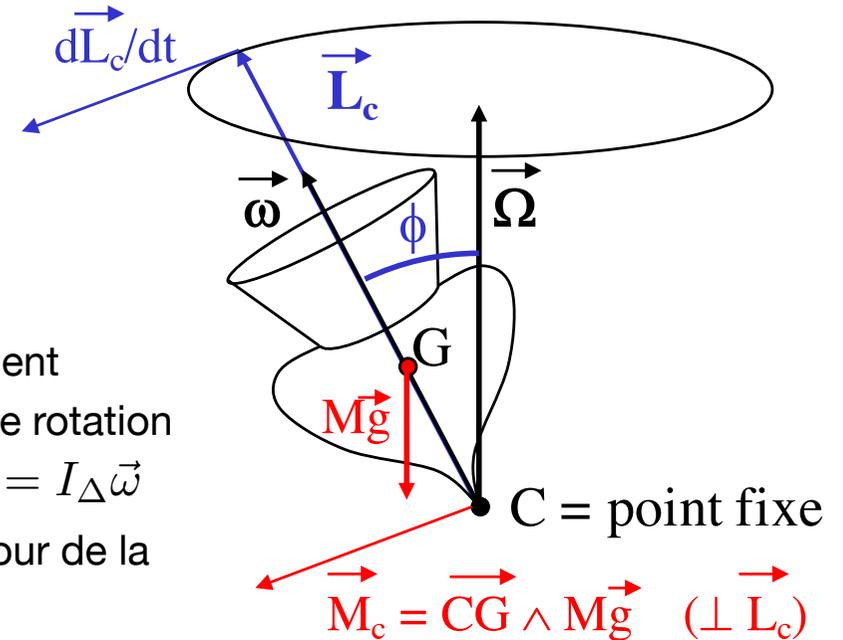


- Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} = \left(\vec{r} \wedge \vec{F} \right) + \left(-\vec{r} \wedge -\vec{F} \right) = 2\vec{r} \wedge \vec{F}$$

Effets gyroscopiques

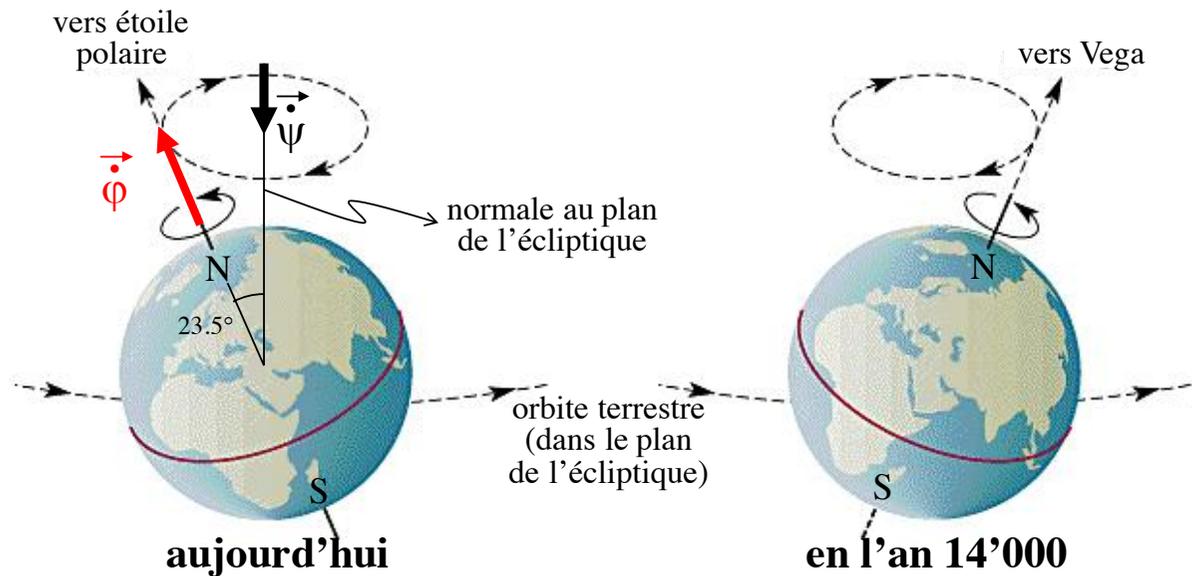
- Toupie symétrique avec un point fixe:
 - Le moment du poids par rapport au point fixe est constamment perpendiculaire au moment cinétique (supposé selon l'axe de rotation propre) la norme du moment cinétique reste constante: $\vec{L}_C = I_\Delta \vec{\omega}$
 - L'axe de rotation propre a un mouvement de *précession* autour de la verticale, à la vitesse $\vec{\Omega}$



$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_C}{dt} &= \vec{M}_C = \vec{CG} \wedge M\vec{g} \\ &= -\bar{C}GMg\hat{e}_r \wedge \hat{e}_z = \frac{\bar{C}GMg}{I_\Delta\omega} \hat{e}_z \wedge I_\Delta\omega\hat{e}_r \\ \frac{d\vec{L}_C}{dt} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_C \end{aligned}$$

- Ceci n'est valable que si la rotation est lente: on peut alors négliger la précession dans le calcul du moment cinétique.
- Dans le cas général, ϕ n'est pas constant et un mouvement de *nutaton* se superpose

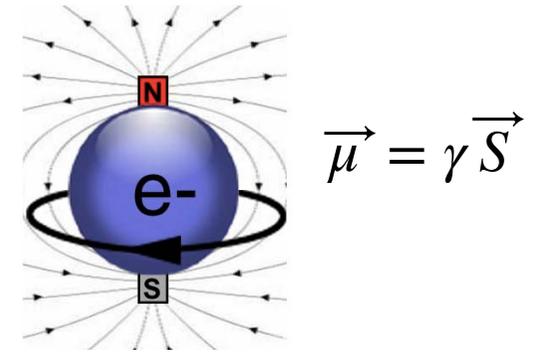
Précession des équinoxes



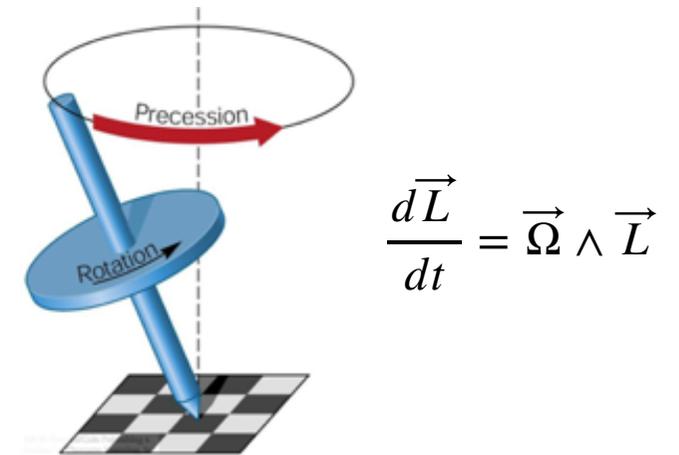
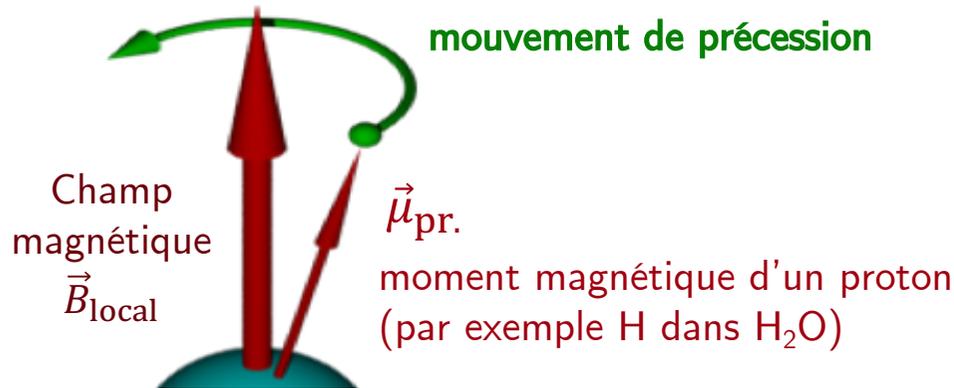
- Mis en évidence par Hipparque (135 av. JC)
 - La position du Soleil à l'équinoxe de printemps se déplace par rapport aux étoiles fixes de 1.5 degrés par siècle
- Précession de l'axe de rotation de la Terre autour de la normale au plan de l'écliptique : période de 26'000 ans
- Egalement petite nutation de 9.2 secondes d'arc : période de 19 ans
- Ces mouvements sont causés par le moment des forces exercées par la lune et le soleil sur la Terre par rapport au centre de masse de la Terre

Spectroscopie par résonance magnétique (nucléaire ou électronique) : précession de Larmor

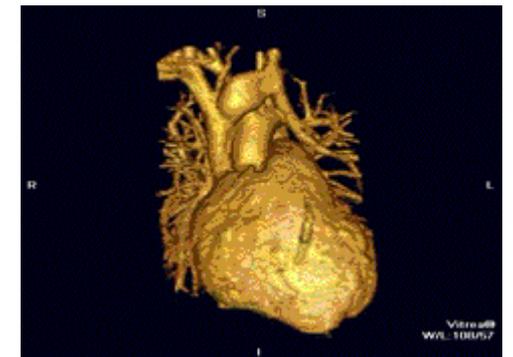
Au spin \vec{S} d'une particule (électron, proton, neutron) est associé un moment magnétique $\vec{\mu}$; un champ magnétique \vec{B} cause un moment de force $\vec{\mu} \wedge \vec{B}$



$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} = -\gamma \vec{B} \wedge \vec{S}$$



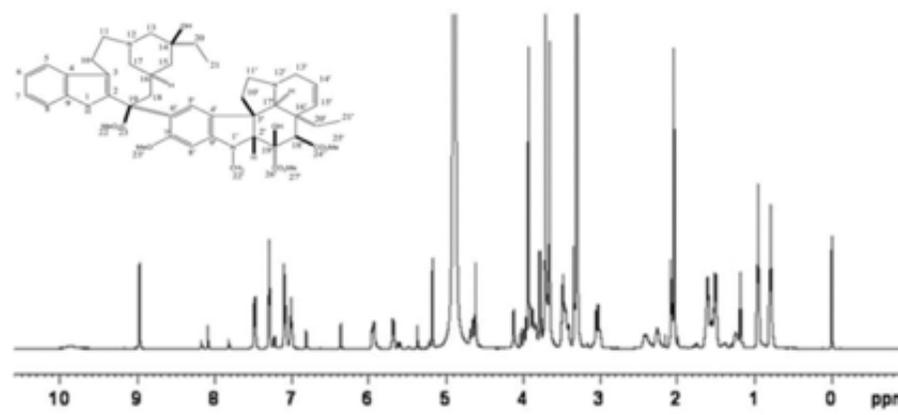
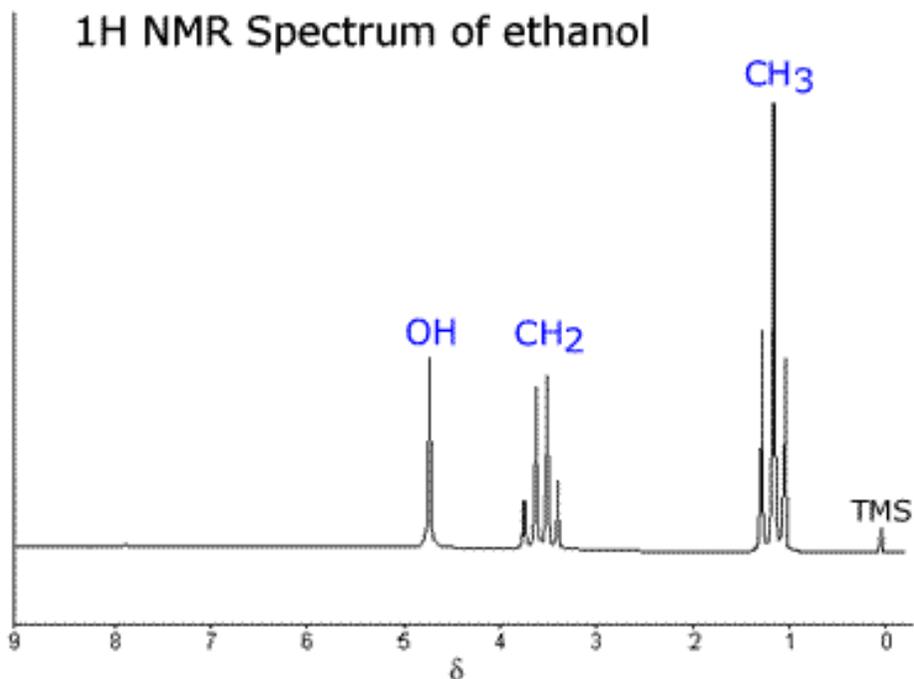
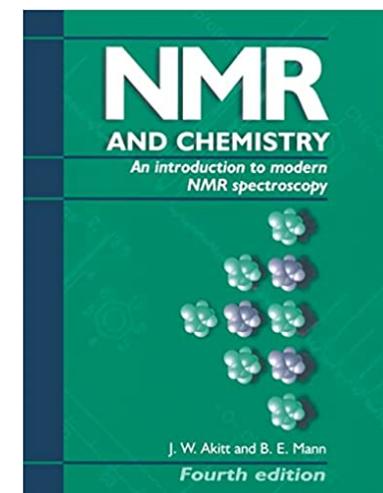
Appareils pour NMR et MRI



Spectroscopie par résonance magnétique nucléaire

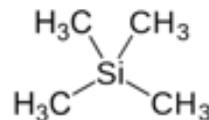
Imagerie par résonance magnétique

Spectroscopie par résonance magnétique nucléaire



δ est le déplacement relatif de la fréquence de résonance du spin par rapport à la référence TMS, exprimé en parties par million (p.p.m.)

TMS = Tetramethylsilane



Axes en rotation: équations d'Euler

- Soit C un point fixe d'un solide (ex: le centre de masse)
- Soit un repère d'inertie $C\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ au point C lié au solide

$$\vec{L}_C = \sum_i L_i \hat{e}_i \quad L_i = I_i \omega_i$$

Moments d'inertie principaux
Composantes du vecteur vitesse de rotation

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum_i \dot{L}_i \hat{e}_i + L_i \dot{\hat{e}}_i = \sum_i I_i \dot{\omega}_i \hat{e}_i + L_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i = \sum_i I_i \dot{\omega}_i \hat{e}_i + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_C$$

- Th. du moment cinétique en composantes dans le repère d'inertie:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 & = & M_{C,1}^{\text{ext}} \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 & = & M_{C,2}^{\text{ext}} \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 & = & M_{C,3}^{\text{ext}} \end{cases}$$

Solide en rotation libre

- Par exemple, un solide en chute libre: le centre de masse suit une parabole (sans frottements),

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = 0$$

- Cas particulier d'une rotation suivant un axe proche d'un axe principal d'inertie

$$\omega_1 \gg \omega_2, \omega_3$$

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \omega_1 = \text{Constante} \\ I_2 \ddot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \dot{\omega}_3 \omega_1 \\ I_3 \ddot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \dot{\omega}_2 \end{cases}$$

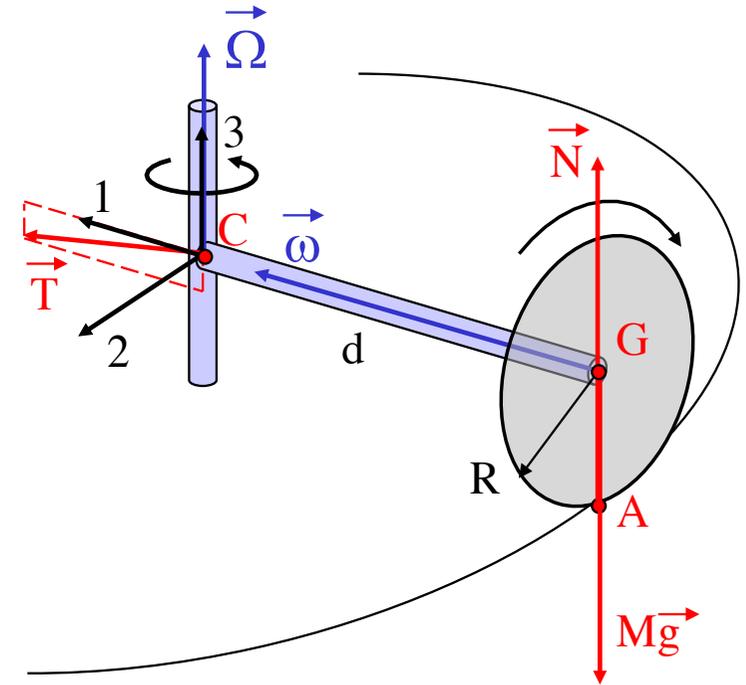
$$\implies \begin{cases} \ddot{\omega}_2 = \frac{(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2 \omega_2 \\ \ddot{\omega}_3 = \frac{(I_1 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_2 I_3} \omega_1 \dot{\omega}_3 \end{cases}$$

- Les vitesses de rotation 2 et 3 vont osciller et donc rester petites autour de 0 si et seulement si

$$(I_3 - I_1)(I_1 - I_2) < 0 \Leftrightarrow I_1 = \min(I) \text{ ou } \max(I)$$

Exemple: mouvement de la meule

- Meule: disque mince de masse M , rayon R , centre de masse G
- Axe de la meule horizontal, sans masse, longueur d
- Roulement sans glissement
- C point fixe sur l'axe vertical



- Vecteur vitesse de rotation total: $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$

$$\begin{cases} v_A = 0 & = v_G + (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{GA} \\ v_C = 0 & = v_G + (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{GC} \end{cases} \implies (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{GA} = (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{GC} \\ \implies R\omega = d\Omega$$

- Equations du mouvement:

$$\begin{cases} M\vec{a}_G & = \vec{N} + \vec{T} + M\vec{g} + \vec{F}_f \\ \frac{d\vec{L}_C}{dt} & = \vec{CG} \wedge M\vec{g} + \vec{CA} \wedge (\vec{N} + \vec{F}_f) \end{cases}$$

Exemple: mouvement de la meule

- Tenseur d'inertie : dans le repère d'inertie d'axes 1,2,3 en rotation avec l'axe de la meule autour de 3

$$\left(\tilde{I}_C\right)_{ij} = \left(\tilde{I}_G\right)_{ij} + M \left[C\vec{G}^2 \delta_{ij} - (CG)_i (CG)_j \right] \quad C\vec{G} = \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{I}_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}$$

- Expression du moment cinétique

$$\vec{L}_C = \tilde{I} \cdot (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) = \left(\tilde{I}\right)_{11} \vec{\omega} + \left(\tilde{I}\right)_{33} \vec{\Omega} \implies \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \frac{1}{2}MR^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{2}MR^2 \vec{\Omega} \wedge \vec{\omega}$$

Exemple: mouvement de la meule

- Equation du mouvement en projection

Th. du moment cinétique $\frac{1}{2}MR^2\Omega\omega = d(N - Mg)$

$$\implies N = Mg + \frac{1}{2}MR^2\Omega\frac{\omega}{d} = Mg + \frac{1}{2}MR\Omega^2 > Mg$$

Th. du centre de masse $\left\{ \begin{array}{l} Md\Omega^2 = T_1 \\ 0 = T_2 + F_f \\ 0 = T_3 + N - Mg \end{array} \right.$

Dynamique du solide avec un axe fixe

Quand un axe de rotation est fixe (et qu'on ne s'intéresse pas aux forces et moments qui le maintiennent en place), il est utile de projeter le théorème du moment cinétique sur cet axe

- Pour tout point O sur l'axe de rotation Δ de direction \hat{u}

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{M}_O^{\text{ext}} &\implies \frac{d}{dt} (\vec{L}_O \cdot \hat{u}) = \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \hat{u} \\ &\implies \frac{d}{dt} (I_\Delta \omega) = \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha^{\text{ext}}) \cdot \hat{u} \\ &\implies I_\Delta \dot{\omega} = \sum_\alpha (\vec{r}_{\alpha,\perp} \wedge \vec{F}_{\alpha,\perp}^{\text{ext}}) \cdot \hat{u} \end{aligned}$$

composantes
perpendiculaires

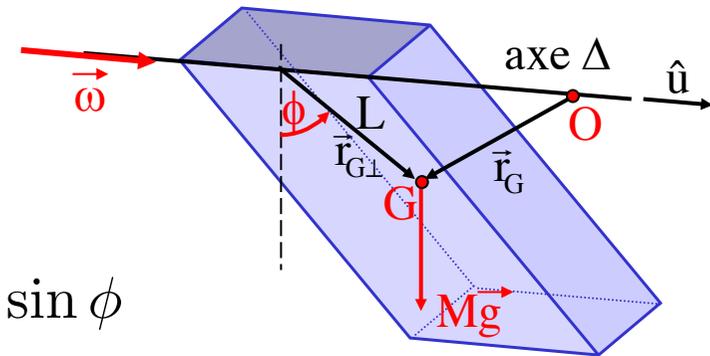
Exemple: pendule physique

- Solide soumis à la pesanteur et libre de se mouvoir autour d'un axe fixe horizontal

$$I_{\Delta} \dot{\omega} = \sum_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha, \perp} \wedge m_{\alpha} \vec{g}) \cdot \hat{u}$$

$$I_{\Delta} \ddot{\phi} = (\vec{r}_{G, \perp} \wedge M \vec{g}) \cdot \hat{u} = -LMg \sin \phi$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{LMg}{I_{\Delta}} \sin \phi$$



- Si toute la masse M est concentré en G : $I_{\Delta} = ML^2$

On retrouve le pendule mathématique $\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin \phi$

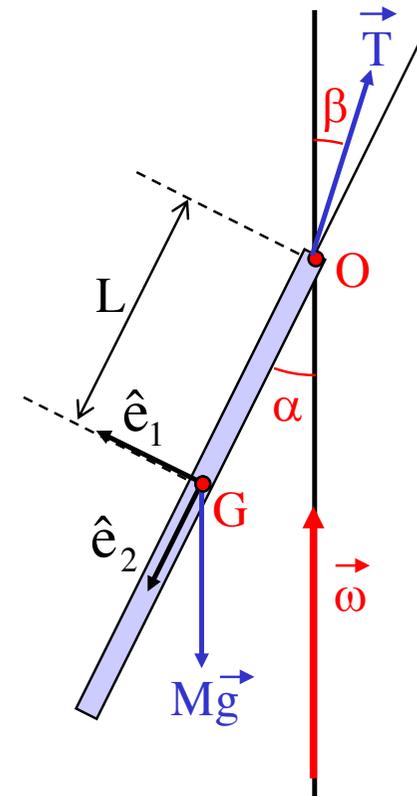
Pendule physique tournant

- Rotation uniforme autour d'un axe fixe vertical passant par O
- Dans le repère d'inertie $G\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$

$$\vec{\omega} = \omega \sin \alpha \hat{e}_1 - \omega \cos \alpha \hat{e}_2$$

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} = I_{\perp} \omega \sin \alpha \hat{e}_1 - I_{\parallel} \omega \cos \alpha \hat{e}_2$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{L}_G = (I_{\perp} - I_{\parallel}) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \hat{e}_3$$



Pendule physique tournant

- Théorème du moment cinétique:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{G}\vec{O} \wedge \vec{T} &\implies (I_{\perp} - I_{\parallel}) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = TL \sin(\alpha - \beta) \\ &= LT(\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha) \end{aligned}$$

- Théorème du centre de masse:

$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a}_G \implies \begin{cases} T \cos \beta = Mg \\ T \sin \beta = M\omega^2 L \sin \alpha \end{cases}$$

$$(I_{\perp} - I_{\parallel}) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = L (Mg \sin \alpha - M\omega^2 L \sin \alpha \cos \alpha)$$

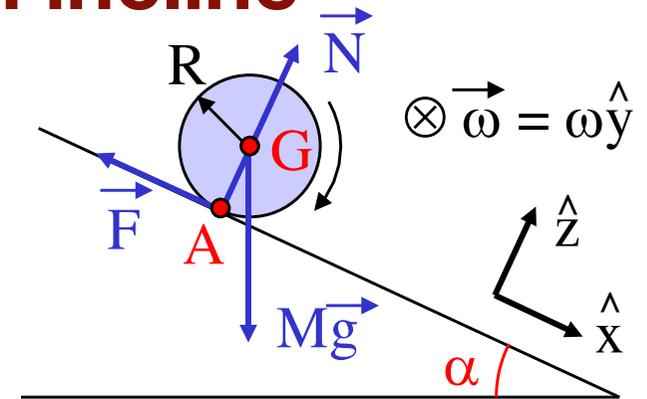
On retrouve le pendule
mathématique : $I_{\perp} = I_{\parallel}$
 $\alpha = \beta$

$$\cos \alpha = \frac{g/(\omega^2 L)}{1 + \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{ML^2}} < \frac{g}{\omega^2 L}$$

Roulement sans glissement sur plan incliné

- Cylindre de révolution $\vec{v}_A = 0 \implies v_G = \omega R$
- Moment d'inertie: $I_{G,y} = kMR^2$

k est un nombre sans dimension caractérisant la forme de la distribution de masse ($k = 1$ si le cylindre est vide, $k = 1/2$ si le cylindre est homogène plein)



- Moment cinétique: $\vec{L}_G = I_{G,y}\vec{\omega} \implies kMR^2 \frac{v_G}{R} = kMRv_G$
- Equation du mouvement

$$M\vec{a}_G = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} \implies \begin{cases} Ma_G = Mg \sin \alpha - F \\ 0 = 0 \\ 0 = N - Mg \cos \alpha \end{cases} \quad a_G = \frac{g \sin \alpha}{k + 1}$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G \implies \begin{cases} 0 = 0 \\ kRMa_G = FR \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{Indep. de } M \text{ et } R!$$