EPFL Lénaïc Chizat
Sections MX-SC-CGC 12 décembre 2022

Analyse I – Série 12

Echauffement. (Séries de Mac-Laurin)

Trouver les séries de Mac-Laurin et rayons de convergence des

a) $f(x) = \sin(x)$ b) $f(x) = \cos(x)$ c) $f(x) = e^x$

d) $f(x) = e^{-x}$ e) $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ f) $f(x) = \mathrm{ch}(x)$

g) $f(x) = \mathrm{Log}(1 + x)$ h) $f(x) = \mathrm{Log}(1 - x)$

Exercice 1. (Formules de dérivées)

Vérifier les identités suivantes à l'aide des séries de Mac-Laurin :

a) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ b) $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$

c) $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$ d) $\frac{d}{dx} \mathrm{Log}(1 + x) = \frac{1}{1 + x}$

Exercice 2. (Séries entières)

Déterminer le développement en série entière de la fonction $f(x) = \frac{2}{3 + 4x}$ autour de a et déterminer l'intervalle de convergence pour

a) $a = 0$ b) $a = 2$

Exercice 3. (Séries de Taylor)

Étudier la limite $n \to \infty$ du développement limité d'ordre n autour de $x = a$, pour chacune des fonctions ci-dessous (en particulier, étudier le reste $R_n(x)$ comme vu en cours pour $x \mapsto 1/(1 - x)$). Ensuite, donner la série de Taylor de f autour de a, ainsi que son domaine de convergence.

a) $f(x) = e^{2x+1}$ avec $a = 0$, b) $f(x) = \frac{1}{x + 1}$ avec $a = 2$.

Exercice 4. (Séries de Mac-Laurin)

Trouver les trois premiers termes (non nuls) de la série de Mac-Laurin des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \mathrm{Log}\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)$ b) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$

c) $f(x) = \mathrm{Arctg}(x)$ (utiliser la formule de Taylor) d) $f(x) = \sqrt{1 + \mathrm{tg}(x)}$

Exercice 5. (V/F : Dérivées d'ordre supérieur)

Soient I un intervalle ouvert, $f, g \in C^{n+1}(I)$ et $a \in I$. Soient encore $k, n \in \mathbb{N}$.

	V	F
a) Pour $n \geq 6$, si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $0 \leq k < 7$ et $f^{(7)}(a) = 1$, alors f admet un minimum en a.	☐	☐
b) Si $I =]-b, b[$ pour un $b > 0$ et f est impaire sur I, alors $f^{(2k)}(0) = 0$ pour $0 \leq 2k \leq n$.	☐	☐

c) Si $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ pour tout $0 \leq k < n$ et $g^{(n)}(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$. ☐ ☐

Exercice 6. (V/F : Fonction définie par un développement limité)

Soient $b, c \in \mathbb{R}$ et soit $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = bx + cx^2 + x^4\varepsilon(x)$, où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

	V	F
a) Alors f est continue en 0.	☐	☐
b) Si $f \in C^2(]-1,1[)$, alors $f''(0) = c$.	☐	☐
c) On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = b$.	☐	☐
d) $f(x)^2 = b^2x^2 + c^2x^4 + x^6\varepsilon(x)$.	☐	☐

Exercice 7. (Primitives)

Trouver des primitives pour les fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \sin(x)$

b) $f(x) = \cos(x)$

c) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$

d) $f(x) = e^x$

e) $f(x) = \operatorname{sh}(x)$

f) $f(x) = \operatorname{ch}(x)$

g) $f(x) = \operatorname{Log}(x)$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

i) $f(x) = (ax+b)^s$ $(s \neq -1)$

j) $f(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}$

k) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

l) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$

m) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x)}$

n) $f(x) = x\exp(x^2)$

o) $f(x) = (ax^p+b)^s x^{p-1}$ $(s \neq -1, \quad a, p \neq 0)$

Exercice 8.(*) (Intégration immédiate)

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{1+x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}(x)}{e^x+1}\,dx$

Exercice 9. (Révisions : suites définies par récurrence)

Considérer la suite (a_n) définie par $a_1 := \frac{5}{2}$ et, pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 6}{5}.$$

a) Montrer que $2 \leq a_n \leq 3$ pour tout pour tout $n \geq 1$,

b) Montrer que (a_n) est décroissante,

c) Conclure que (a_n) converge et calculer sa limite.