N.B. On aurait pu le retrouver à l'aide de la formule de Taylor :

$$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f(0) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = \cos(x)^{-2} \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -2(-\sin(x))\cos(x)^{-3} \Rightarrow f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = 2\cos(x)^{-2} + 2\sin(x)\cdot(-3)\cdot(-\sin x)\cdot\cos(x)^{-4} \Rightarrow f'''(0) = 2$$

Donc par la formule de Taylor :

$$\tan(x) = 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + x^3\cdot\varepsilon(x)$$
$$= x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\cdot\varepsilon(x) \leftarrow \text{cohérent avec le calcul ci-dessus.}$$

fin cours 01/12

7.3 Séries entières

Def: Une série entière est une série de la forme :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

avec $a_k \in \mathbb{R}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ et x est un paramètre.

Question : Convergence et valeur de la somme en fonction de x ?

N.B : Souvent on pose $\underbrace{\xi}_{xi} = (x - x_0)$ alors $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi^k$

"[x proche de x_0] $\Leftrightarrow$ [ξ proche de 0]"

Thm : Il existe $r \in [0, +\infty]$ (soit $r \geq 0$, soit $r = +\infty$) tel que la série entière $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi^k$ converge absolument pour $|x - x_0| < r$ et diverge pour $|x - x_0| > r$.
$(|\xi| < r)$ $(|\xi| > r)$

Remarques :

- le nombre r est appelé le rayon de convergence de la série.
- Si $r = +\infty$: la série converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$
- Si $r = 0$: la série ne converge que pour $x = x_0$ $(\xi = 0)$

et on a $S = a_0$ (la convention est ici $0^0 = 1$)

- le Thm. ne dit rien pour le cas $|x - x_0| = r$ $(|\xi| = r)$

Thm : On a $\frac{1}{r} = \limsup_{k \to +\infty} |a_k|^{1/k}$ (avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$)

De plus, si les limites suivantes existent, on a :

- $\lim_{k \to +\infty} |a_k|^{1/k} = \frac{1}{r}$ (Cauchy)
- $\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{1}{r}$ (D'Alembert)

Explication : $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{a_k (x - x_0)^k}_{b_k}$

Critère de la lim-sup :

$$q = \limsup_{k \to +\infty} |b_k|^{1/k} = \limsup_{k \to +\infty} |a_k|^{1/k} \cdot |x - x_0|$$
$$= |x - x_0| \cdot \limsup_{k \to +\infty} |a_k|^{1/k}$$

→ La série converge absolument si $q < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < \underbrace{\frac{1}{\limsup_{k \to +\infty} |a_k|^{1/k}}}_{= r}$

7.4 Fonctions définies par des séries entières

Si $r \in]0, +\infty]$, on définit la fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

définie sur $D =]x_0 - r, x_0 + r[$ (et éventuellement en $x_0 - r$ et $x_0 + r$).

Thm (dérivée des séries entières). On peut dériver "terme à terme" la série entière, c'est-à-dire :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot a_k \cdot (x - x_0)^{k-1}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} (\ell+1)\, a_{\ell+1} \cdot (x - x_0)^{\ell} \quad (\text{avec } \ell = k-1)$$

et le rayon de convergence de cette série entière est r.

Plus généralement, on a $f \in C^{\infty}(]x_0 - r, x_0 + r[)$ et

$$(*) \quad f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{k!} a_{k+n} (x - x_0)^k \quad (\text{même rayon de convergence})$$

- Explication du rayon de convergence :

Si $r = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$, alors regardons le critère de d'Alembert pour f' :

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}(k+1)}{a_{k+2}(k+2)} \right| = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}} \right| \cdot \lim_{k \to +\infty} \frac{k+1}{k+2} = r \cdot 1 = r.$$

Remarque : de $(*)$ on déduit : $f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n \Leftrightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

$\rightarrow$ C'est le coefficient donné par la formule de Taylor.

7.5 Série de Taylor d'une fonction

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f \in C^{\infty}(I)$.

Par la formule de Taylor, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x)$

Si $\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$, alors $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ (Série de Taylor)

Si $x_0 = 0$, alors $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ (série de McLaurin)

Question : quand a-t-on $\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$?

Exemple : Soit $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

Soit $I =]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ (à titre d'exemple), $x_0 = 0$.

On a $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = \frac{1}{k!} \cdot k! \underbrace{(1-x)^{-1-k}}\Big|_{x=0} = 1$

Détails : $f(x) = (1-x)^{-1}$, $f'(x) = (-1)\cdot(-1)\cdot(1-x)^{-2}$, $f''(x) = (-2)\cdot(-1)(1-x)^{-3}$ etc (par récurrence)

Donc (Formule de Taylor) :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + r_n(x)$$

avec $r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u)\, x^{n+1}$ où u est un réel entre x et x_0.

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot (n+1)!\,(1-u)^{-1-(n+1)} \cdot x^{n+1}$$

$$= \frac{1}{1-u} \cdot \left(\frac{x}{1-u}\right)^{n+1}$$

Donc pour $x, u \in I$, on a :

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{1/4}{1-1/4}\right)^{n+1} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ au moins pour $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

En fait, on a $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ pour $x \in]-1, 1[$ i.e le rayon de convergence est 1.

⚠ Si $x = 2$, on a $f(x) = \frac{1}{1-2} = -1$ mais $\sum_{k=0} 2^k$ diverge.

Avec une méthode similaire, on trouve (à connaître) : $(x_0 = 0)$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} x^k \qquad x \in]-1, 1[$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k x^k \qquad x \in]-1, 1[$$

$$\mathrm{Log}(1+x) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} x^k \qquad x \in]-1, 1[\text{ (on fait } x \in]-1, 1]\text{)}$$

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \qquad x \in \mathbb{R}$$

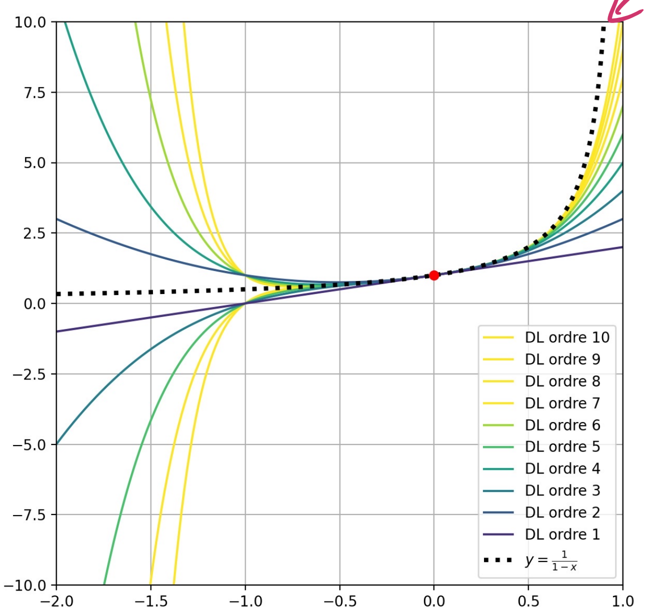
$$\sin(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad x \in]-1, 1[\quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\hookrightarrow \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$\frac{1}{1-x}$



fin cours 05/12