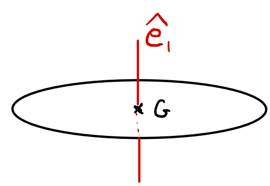
Dynamique : point matériel vs. solide

	Point matériel / c.d.m	Solide (rotations)
Eq. du mvt	$\boxed{\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \sum_\beta \vec{F}_\beta^{ext}}$ Ne dépend pas des points d'application des forces ext.	$\boxed{\dfrac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o^{ext}}$ pour un choix du point O fixe ou $O = G$ = c.d.m. Ici $\vec{M}_o^{ext} = \sum_\beta \vec{OP_\beta} \wedge \vec{F}_\beta^{ext}$ (P_β point d'application de la force $\vec{F}_\beta^{ext}$)
Lien avec cinétique	$\boxed{\vec{p} = M\vec{v}}$ où $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ ↳ toujours aligné à $\vec{v}$ ↳ inertie identique dans toutes les directions	$\boxed{\vec{L}_o = \overleftrightarrow{I}^{(o)} \cdot \vec{\omega}}$ → pas tjs : $\vec{L}_o \parallel \vec{\omega}$! Dans un repère d'inertie $\underbrace{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3}_{\text{axes principaux d'inertie}}$: $\overleftrightarrow{I}^{(G)} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$ où I_1, I_2, I_3 moments principaux
Projection	Selon une direction quelconque $\hat{e}_x$: $\vec{p} \cdot \hat{e}_x = M\vec{v} \cdot \hat{e}_x$ $p_x = M v_x$ $\Rightarrow \boxed{M \dfrac{dv_x}{dt} = \sum \vec{F} \cdot \hat{e}_x}$	• Si $G \in \Delta$ et $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_\Delta$: $\boxed{\vec{L}_G \cdot \hat{e}_\Delta = I_\Delta^{(G)} \omega}$ où $I_\Delta^{(G)} = \hat{e}_\Delta \cdot \overleftrightarrow{I}^{(G)} \cdot \hat{e}_\Delta$ • Si $C \in \delta \parallel \Delta$ alors $\boxed{I_\delta^{(c)} = I_\Delta^{(G)} + M d^2(\Delta, \delta)}$ • $\dfrac{d\vec{L}_c}{dt} \cdot \hat{e}_\delta = \vec{M}_c^{ext} \cdot \hat{e}_\delta \Rightarrow \boxed{I_\delta^{(c)} \dot{\omega} = \vec{M}_c^{ext} \cdot \hat{e}_\delta}$
Conservation	Si $\vec{F}^{ext} \cdot \hat{e}_x = 0$ alors $M v_x$ = constante	Si $\vec{M}_c^{ext} \cdot \hat{e}_\delta = 0$ alors $I_\delta^{(c)} \omega$ = constante

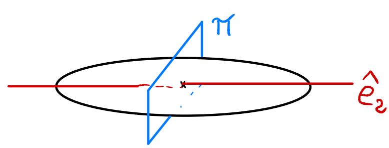
• Comment trouver un repère d'inertie $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$?

Soit un axe Δ passant par G, c.d.m du solide :

. Si Δ est un axe de symétrie de révolution alors Δ est un axe principal d'inertie



. Si Π est un plan de symétrie (réflexion) alors tout $\Delta \perp \Pi$ est un axe principal



I) Energie cinétique totale d'un solide

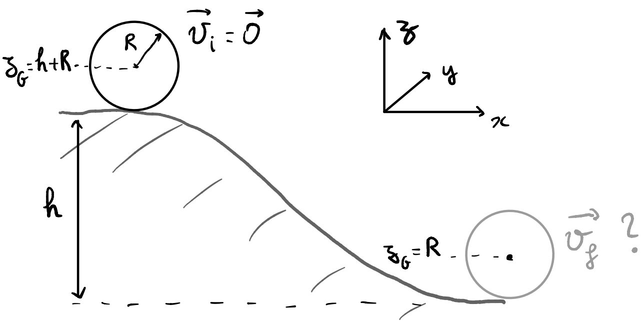
On connait la vitesse instantanée d'un point A du solide et $\vec{\omega}$, alors :

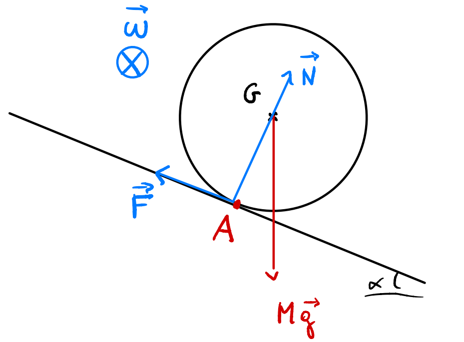
$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_A^{\,2} + M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{AG}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I}_A \cdot \vec{\omega} \qquad \text{(formule générale)}$$

En particulier si $\vec{v}_A = 0$ ou bien si $A = G$ (c.d.m.) et $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_\Delta$:

$$\boxed{K = \underbrace{\frac{1}{2} M \vec{v}_A^{\,2}}_{K_{p.mat.}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_\Delta^{(A)} \omega^2}_{K_{rotation}}}$$

Ex : cylindre sur une pente (roule sans glisser)





* Système : cylindre de masse M
* Référentiel : lié au sol
* Forces : . pesanteur $M\vec{g}$ $\longrightarrow$ conservative, potentiel $V(z_G) = Mgz_g$

Puissance nulle
. Force de liaison $\vec{N}$ normale à la piste
. Force de frottement statique $\vec{F}$

$\vec{F} \cdot \vec{v}_A = \vec{N} \cdot \vec{v}_A = 0$ car $\boxed{\vec{v}_A = \vec{0}}$ roulement sans glissement.

Donc l'énergie mécanique est conservée : $\underset{0}{K_i} + V_i = K_f + V_f$

d'où : $\boxed{K_f = V_i - V_f = Mgh}$

Deux façons d'exprimer K_f

① Par rapport à G : $K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_y^{(G)} \omega^2$

or $\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AG} = \vec{\omega} \wedge \vec{AG} \longrightarrow \|\vec{v}_G\| = \omega R = v_G$

ainsi : $K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \frac{I_y^{(G)}}{R^2} v_G^2$

Selon la répartition des masses : $I_y^{(G)} = \lambda M R^2$

où $\lambda = \frac{1}{2}$ pour un cylindre homogène

$\lambda = 1$ ——— creux

Donc : $\boxed{K = \frac{1}{2}(1+\lambda) M v_G^2}$

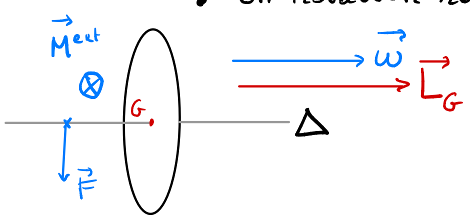
② Par rapport à A : $K = \frac{1}{2} I_y^{(A)} \omega^2$ or $I_y^{(A)} = I_y^{(G)} + M R^2$

donc : $K = \frac{1}{2}(\lambda M R^2 + M R^2) \frac{v_G^2}{R^2} = \frac{1}{2}(\lambda + 1) M v_G^2$

Finalement : $\boxed{v_f = \sqrt{\frac{2 g h}{1+\lambda}}}$

II) Effets gyroscopiques

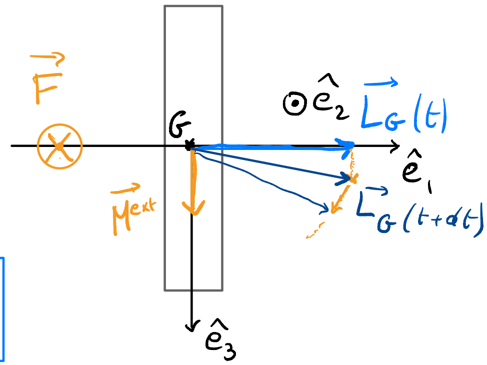
Gyroscope :
- peut tourner autour de son c.d.m.
- En rotation rapide autour d'un axe principal d'inertie



Vue de dessus

$\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$: repère d'inertie

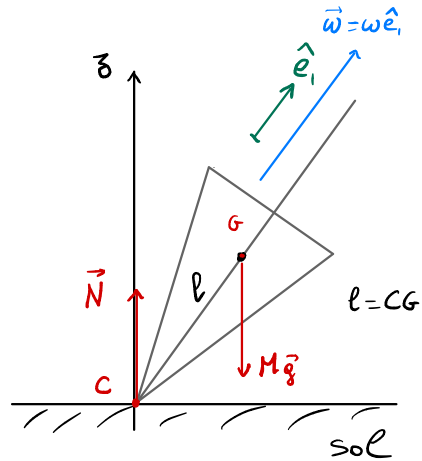
↳ // axes princ. d'inertie



$$\boxed{\vec{L}_G(t+dt) = \vec{L}_G(t) + \vec{M}_G^{ext}\, dt}$$

(Th. du mom. cin.)

Ex : Toupie (sans frottements)



Moment cinétique p/r à C (point fixe) :

* $\vec{L}_C = \underset{\text{moment d'inertie autour de } \hat{e}_1}{I_1} \omega \hat{e}_1$ car $\vec{\omega}$ // axe princ. d'inertie

* $\vec{M}_C^{ext} = \vec{CG} \wedge M\vec{g} = \ell \hat{e}_1 \wedge (-Mg\, \hat{e}_3)$

$$= \ell M g\, \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1$$

$$= \underbrace{\frac{\ell M g}{I_1 \omega} \hat{e}_3}_{\vec{\Omega}} \wedge \underbrace{I_1 \omega \hat{e}_1}_{\vec{L}_C}$$

Donc $\boxed{\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_C}$ Précession autour de $\vec{\Omega}$

↳ c'est un mouvement de précession : $\vec{L}_C$ tourne autour de $\hat{e}_3$ à une vitesse angulaire $\frac{\ell M g}{I_1 \omega}$

Valide seulement si $|\vec{\Omega}| \ll |\vec{\omega}|$, c'est à dire : $\boxed{I_1 \omega^2 \gg M \ell g}$

Sinon, on doit utiliser les équations d'Euler pour le cas général.

car $\vec{\omega} \neq \vec{\omega}_{tot}$

Cas général : équations d'Euler (= th. du moment cinétique en G)

Solide quelconque. G = c.d.m., $\hat{e}_1\, \hat{e}_2\, \hat{e}_3$ repère d'inertie

$$\vec{L}_G = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \cdot \vec{\omega} \quad \text{c'est à dire} \quad \vec{L}_G \cdot \hat{e}_i = L_i = I_i \omega_i$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{3} L_i \hat{e}_i\right) = \sum_i I_i \dot{\omega}_i \hat{e}_i + I_i \omega_i\, \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i \qquad \text{où } \vec{\omega} = \sum_j \omega_j \hat{e}_j$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{ext} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\,\omega_2 \omega_3 &= M_1^{ext} \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\,\omega_1 \omega_3 &= M_2^{ext} \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\,\omega_2 \omega_1 &= M_3^{ext} \end{aligned}} \quad \text{Equations d'Euler.}$$

Exemple

Rotation libre, rapide, autour de $\hat{e}_1$: $\vec{M}_G^{ext} = \vec{0}$, $\omega_1 \gg \omega_2, \omega_3$, $\omega_1 \approx$ constante

$$I_2 \ddot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)(\dot{\omega}_1 \omega_3 + \omega_1 \dot{\omega}_3) \approx (I_3 - I_1)\,\omega_1 \times \frac{(I_1 - I_2)\omega_2 \omega_1}{I_3} \quad \text{car } \dot{\omega}_1 \approx 0$$

donc $$\ddot{\omega}_2 = -\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)\,\omega_1^2}{I_2 I_3}\, \omega_2(t) \qquad \text{(similaire pour } \ddot{\omega}_3\text{)}$$

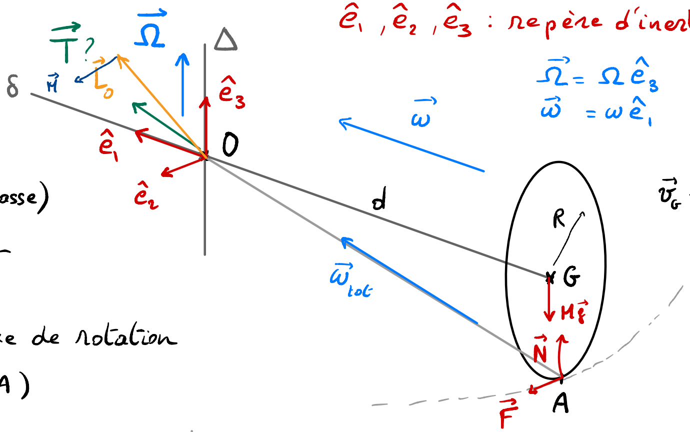
$$= -\alpha\, \omega_2(t) \quad \rightarrow \quad \text{oscillations si } \alpha > 0 \qquad \left(\alpha \longleftrightarrow \frac{k}{m}\right)$$

$$\text{instable si } \alpha < 0$$

Conclusion : si $I_2 < I_1 < I_3$ ou $I_3 < I_1 < I_2$ les rotations libres autour de $\hat{e}_1$ sont instables

Exercices

1) Meule



$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$: repère d'inertie

$\vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_3$
$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_1$

$\vec{v}_G = \vec{0}$
$= \vec{\Omega} \wedge \vec{OG}$
$= \vec{\omega} \wedge \vec{AG}$

Système : Roue + axe (sans masse)

↳ roule sans glisser.

Comme $\vec{v}_0 = \vec{v}_A = \vec{0}$ l'axe de rotation instantané est selon (OA)

Calcul du moment cinétique p/r à O :

$$\vec{L}_{(0)} = \overleftrightarrow{I}_{(0)} \cdot \vec{\omega}_{tot} = \overleftrightarrow{I}_{(0)} \cdot (\vec{\Omega} + \vec{\omega})$$
$$= \overleftrightarrow{I}_{(0)} \cdot \vec{\Omega} + \overleftrightarrow{I}_{(0)} \cdot \vec{\omega}$$
$$= I_3^{(0)} \Omega \hat{e}_3 + I_1^{(0)} \omega \hat{e}_1$$
$$= I_\Delta \Omega \hat{e}_3 + I_\delta \omega \hat{e}_1$$

Forces : * Poids $M\vec{g} = -Mg\hat{e}_3$ en G
* Liaison $\vec{N} = N\hat{e}_3$ (contact avec sol) en A
* Frottement statique $\vec{F} = F\hat{e}_2$ en A (roulement sans glissement)
* $\vec{T}$: liaison au point O (3 composantes)

(La balance mesure $\|\vec{N}\|$)

Comme δ passe par G et $\delta // \hat{e}_1$ on a $I_\delta = I_1^{(G)}$ $\left(= \frac{1}{2}MR^2 \text{ pour cylindre plein}\right)$

Par contre Δ ne passe pas par G → on utilise Huygens - Steiner :

$$I_\Delta = I_3^{(G)} + Md^2$$

Donc $\boxed{\vec{L}_0 = I_1 \omega \hat{e}_1 + (I_3 + Md^2)\, \Omega\, \hat{e}_3}$ en général $\vec{L}_0$ pas // à $\vec{\omega}_{tot}$

* Moments des forces en O

* $\vec{T}$ → pas de moment en O

$\vec{OA} = \vec{OG} + \vec{GA} = -d\hat{e}_1 - R\hat{e}_3$

* $$\vec{M}_0^{ext} = \vec{OA} \wedge \vec{F} + \vec{OA} \wedge \vec{N} + \vec{OG} \wedge M\vec{g}$$
$$= \underbrace{\vec{OA} \wedge F\hat{e}_2}_{\perp \hat{e}_2} + \underbrace{\vec{OA} \wedge N\hat{e}_3}_{-d\hat{e}_1 \wedge N\hat{e}_3} + \underbrace{\vec{OG} \wedge (-Mg)\hat{e}_3}_{-d\hat{e}_1 \wedge (-Mg)\hat{e}_3}$$
$$= dN\,\hat{e}_2 - dMg\,\hat{e}_2$$

$\vec{M}_0^{ext} \cdot \hat{e}_2 = d(N - Mg)$

* <u>Th. du moment cinétique</u> (pour ω, Ω constants)

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o^{ext} \quad \text{or} \quad \frac{d\vec{L}_o}{dt} = I_1 \omega \frac{d\hat{e}_1}{dt} = I_1 \omega \vec{\Omega} \wedge \hat{e}_1 = I_1 \omega \Omega \hat{e}_2$$

Projète selon $\hat{e}_2$: $\frac{d\vec{L}_o}{dt} \cdot \hat{e}_2 = \vec{M}_o^{ext} \cdot \hat{e}_2 \Leftrightarrow I_1 \omega \Omega = d(N - Mg)$

Donc : $N = Mg + \frac{I_1 \omega \Omega}{d}$ or $R\omega = d\Omega$ $(\vec{v}_A = \vec{0})$

$$= \boxed{Mg + I_1 \frac{\Omega^2}{R}} > Mg$$

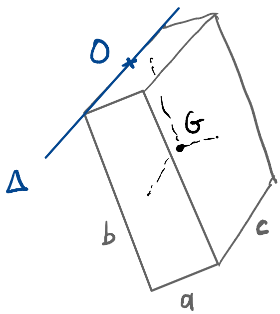
Force mesurée par la balance augmente !

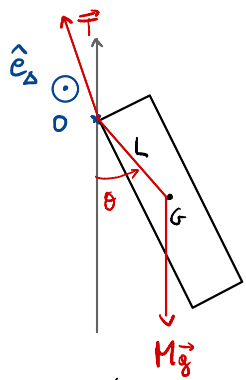
<u>Ex</u> : Pour un disque plein homogène $I_1 = \frac{1}{2} MR^2$ d'où $N = Mg + \frac{1}{2} MR\Omega^2$

$$= M \underbrace{\left(g + \frac{R\Omega^2}{2}\right)}_{g_{eff} > g}$$

---

2) <u>Pendule "solide"</u>





→ Th. mom. cin. en O ⟶ projeté sur $\hat{e}_\Delta$ car mvt autour de Δ

* $\vec{M}_o^{ext} = \vec{OG} \wedge M\vec{g} = -L \sin\theta \, Mg \, \hat{e}_\Delta$

* $\vec{L}_o \cdot \hat{e}_\Delta = I_\Delta^{(O)} \omega$ où $\omega = \dot{\theta}$

↳ $\frac{d}{dt}(I_\Delta \omega) = -L \sin\theta \, Mg \Leftrightarrow I_\Delta \ddot{\theta} = -LMg \sin\theta$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{LMg}{I_\Delta} \sin\theta \underset{\theta \ll 1}{\approx} -\frac{LMg}{I_\Delta} \theta$$

Pour des petits angles θ on a un mouvement harmonique du pulsation $\boxed{\omega_{solide} = \sqrt{\frac{LMg}{I_\Delta}}}$

En particulier, pour un parallélépipède rectangle :

$$I_\Delta^{(G)} = \frac{1}{12} M(b^2+a^2) \approx \frac{1}{12} M (2L)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

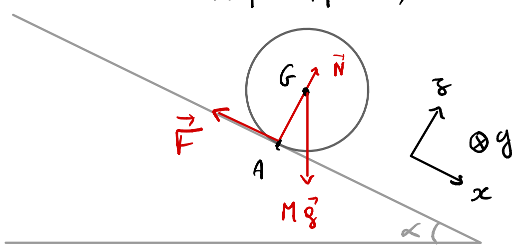
quand $a \ll b$

Ainsi : $I_\Delta^{(0)} = I_\Delta^{(G)} + ML^2 = \frac{4}{3} ML^2$

et $\boxed{\omega_{solide} = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{g}{L}}} = \sqrt{\frac{3}{4}}\,\omega_{p.m.}$ où $\omega_{p.m.} = \sqrt{\frac{g}{L}}$ serait la pulsation pour un pendule fait d'un point materiel à une distance L.

Cylindre sur plan incliné : condition de non glissement ?

Mvt plan/plan , $\vec{\omega} = \omega\,\hat{e}_y$



Système → cylindre

Référentiel → plan incliné

Contraintes → contact en A

Forces : pesanteur en G, liaison + frottement en A

Méthode 1 : Th. du mom. cin. en A + Steiner (élimine $\vec{F}$ et $\vec{N}$)

Méthode 2 : Th. du mom. cin. en G :

* $\vec{L}_G = \overleftrightarrow{I}_G \cdot \vec{\omega} = I_y^{(G)}\,\vec{\omega}$ car $\vec{\omega} \,/\!/\, \hat{e}_y$ = axe principal d'inertie

$= \lambda M R^2 \vec{\omega}$ (où $\lambda \in [0;1]$) et $\dfrac{d\vec{L}_G}{dt} = \lambda M R^2 \dot{\omega}\,\hat{e}_y = \lambda M R\, \ddot{x}_G\, \hat{e}_y$

* $\vec{M}_G^{ext} = \vec{GA} \wedge \vec{F} = -R\hat{e}_z \wedge (-F\hat{e}_x)$ où $F = \|\vec{F}\|$

$= F R\, \hat{e}_y$

* Th mom. cin. : $\lambda M R \ddot{x}_G = F R \Rightarrow F = \lambda M \ddot{x}_G \Rightarrow \boxed{M\ddot{x}_G = \dfrac{F}{\lambda}}$ (1)

2ème loi de Newton projetée sur $\hat{e}_x$: $\boxed{M\ddot{x}_G = -F + Mg\sin\alpha}$ (2)

(1) − (2) : $0 = F\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right) - Mg\sin\alpha$

$\Leftarrow$ $\boxed{F = \dfrac{\lambda}{1+\lambda} Mg\sin\alpha}$ et $\boxed{\ddot{x}_G = \dfrac{g\sin\alpha}{1+\lambda}}$

2ème loi selon $\hat{e}_z$: $\boxed{N = Mg\cos\alpha}$

Frottement statique si $F \leq \mu_s N$

Condition sur μ_s v.s. $\tan\alpha$: $\mu_s \geq \frac{F}{N} \rightarrow \boxed{\mu_s \geqslant \frac{\lambda}{1+\lambda} \tan\alpha}$

- ∘ Cylindre creux : $(\lambda = 1) \rightarrow \mu_s \geqslant \frac{1}{2} \tan\alpha$
- • Cylindre plein $(\lambda = \frac{1}{2}) \rightarrow \mu_s \geqslant \frac{1/2}{3/2} \tan\alpha = \frac{1}{3} \tan\alpha$
- ⊙ Limite : roue où toute la masse est concentrée au centre $\rightarrow \lambda \rightarrow 0$
  ↳ jamais de glissement $\mu_s \geqslant 0$

Rappel : pour un objet qui ne roule pas (par ex. cylindre posé sur le côté) la condition de non glissement est $\mu_s \geqslant \tan\alpha$

Donc dans tous les cas il faut une pente plus grande pour observer le glissement du même objet lorsqu'il peut rouler.