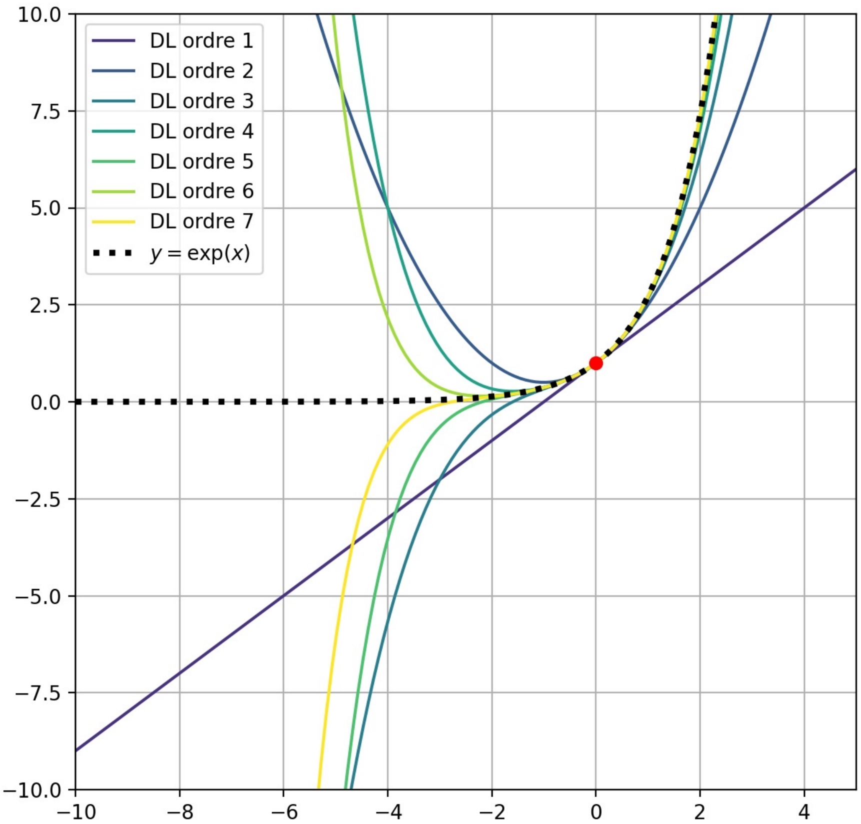
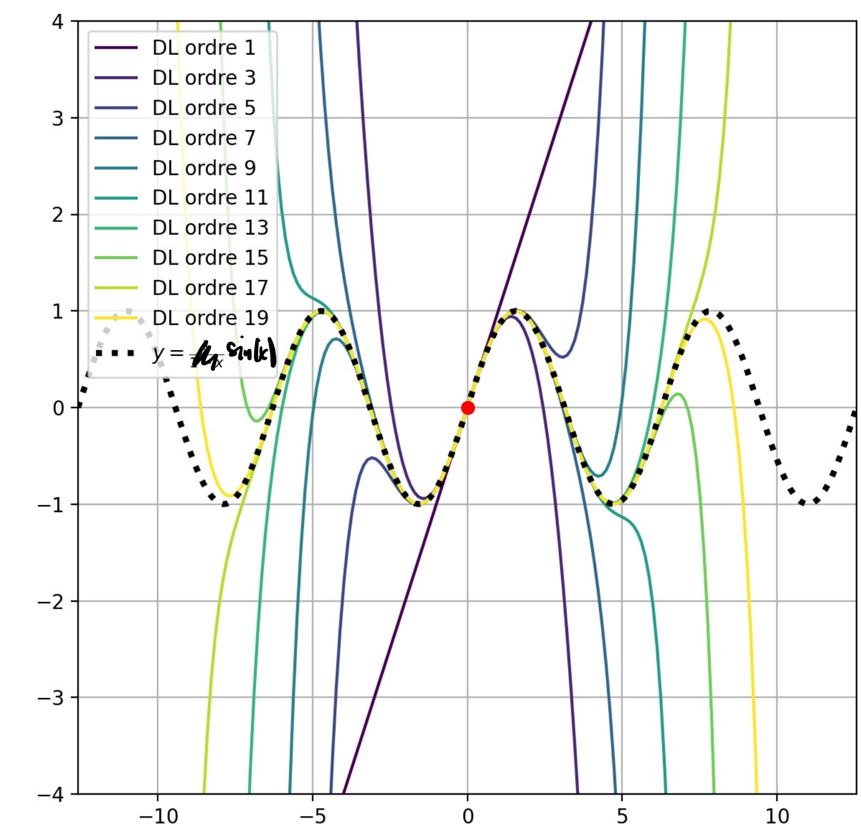

10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
−10.0
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
DL ordre 1
DL ordre 2
DL ordre 3
DL ordre 4
DL ordre 5
DL ordre 6
DL ordre 7
$y = \exp(x)$


4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−10
−5
0
5
10
DL ordre 1
DL ordre 3
DL ordre 5
DL ordre 7
DL ordre 9
DL ordre 11
DL ordre 13
DL ordre 15
DL ordre 17
DL ordre 19
y = sin(x)

Remarque (Hors programme)

On définit l'exponentielle complexe à l'aide de la série entière :
Pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} = \sum_{k\geq 0} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$ → On retrouve la formule d'Euler.

⚠ Toute fonction de classe C^∞ n'est pas nécessairement développable en série entière.

Contre-exemple : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

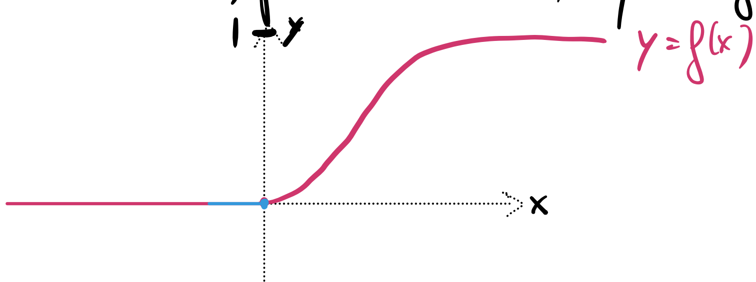
On a $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, en effet (le seul point délicat est $x_0 = 0$) :

(i) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow f \in C^0(\mathbb{R})$

(ii) $\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \underset{u=1/x}{=} \frac{u^2}{e^u} \xrightarrow{u\to+\infty} 0 & \text{si } x > 0 \\ f'(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \text{ (croissances comparées)} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0 \end{cases}$

Donc par le Thm sur la continuité de la dérivée, $f'(0) = 0$. Ainsi $f \in C^1(\mathbb{R})$

(iii) On peut montrer ainsi, par récurrence, que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$



Formule de Taylor en 0 : $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = 0$

Donc $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{=0} + r_n(x) = r_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x) = e^{-1/x} \neq 0$. ⇒ f n'est pas représentée par une série de Taylor $\forall x > 0$.

Chapitre 8 : Intégrales (définies et indéfinies)

8.1 Intégrale indéfinie

Def : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f \in \underbrace{C^0(I)}_{f \text{ est continue}}$. Une primitive de f est une fonction $F \in C^1(I)$ telle que $\forall x \in I$,
$$F'(x) = f(x)$$

→ Si $I = [a, b]$ alors $F'(a)$ doit être lu comme $F'_+(a)$ (dérivée à droite)
$F'(b)$ … $F'_-(b)$ (dérivée à gauche)

Proposition : Soit $f \in C^0(I)$ et soient F et G des primitives de f. Alors $F - G$ est une fonction constante, i.e $\exists C \in \mathbb{R}$ t.q $F(x) - G(x) = C$ $\forall x \in I$.

Preuve : $(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in I$.
Par un corollaire du Thm. des accroissements finis, on en déduit que $F - G$ est une fonction constante.

Def : On appelle intégrale indéfinie toute primitive de $f \in C^0(I)$, elle est notée $\int f(x)\,dx$. On a :
$$\int f(x)\,dx \equiv F(x) + C$$
où $C \in \mathbb{R}$ et F une primitive quelconque de f.

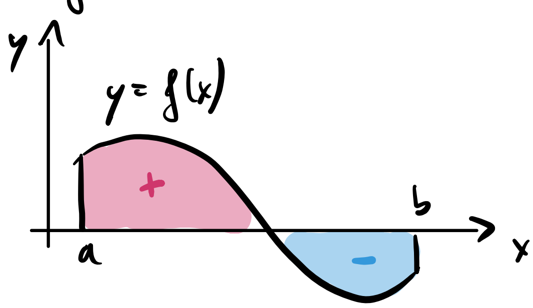
Remarque : prendre la primitive d'une fonction est une opération linéaire, c-à-d. que $\forall f, g \in C^0(I)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

Exemples de primitives à retenir.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx \quad (C \in \mathbb{R})$
$K,\ K \in \mathbb{R}$	$Kx + C$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\operatorname{Log}\lvert x\rvert + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
e^x	$e^x + C$
$\operatorname{Log}(x)$	$x\operatorname{Log}(x) - x + C$
$g'(x)\,g(x) \quad (g \in C^1)$	$\frac{1}{2}g(x)^2 + C$
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\operatorname{Log}(\lvert g(x)\rvert) + C$
$\tan(x)$	$-\operatorname{Log}(\lvert\cos(x)\rvert) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan}(x) + C$
$\frac{g'(x)}{1+g(x)^2}$	$\operatorname{Arctan}(g(x)) + C$

8.2 Construction de l'intégrale définie

Soit $f \in C^0([a,b])$, $a < b$.

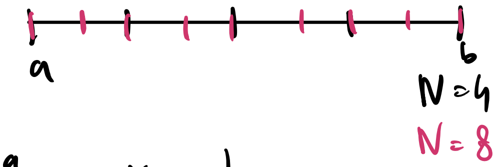


Intégrale = " aire algébrique entre le graphe de f et l'axe des abscisses et entre a et b "

Construction de l'intégrale (de Riemann).

Considérons une suite de subdivisions de $[a,b]$ en N sous-intervalles :

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} \cdot i \quad \text{pour } i = 0, \dots, N$$



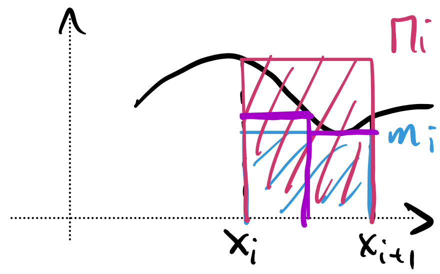
Pour $N=1$: $x_0 = a$, $x_1 = b$

Pour $N=2$: $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$, $x_2 = b$

... etc

On pose $\sigma_n = \left\{ x_i = a + \frac{b-a}{2^n} i \text{ avec } i = 0, 1, \dots, 2^n \right\}$

On a $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$



Donné $f \in C^0([a,b])$, on définit :

$$\begin{cases} \underline{S_n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) & \text{où } m_i = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \\ \overline{S_n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) & \text{où } M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \end{cases}$$

Alors la suite $\underline{S_n}$ est croissante, la suite $\overline{S_n}$ est décroissante et de plus $\underline{S_n} \leq \overline{S_n}$. Donc ces 2 suites admettent des limites

$$\underline{S} = \lim_{n \to +\infty} \underline{S_n} \quad \text{et} \quad \overline{S} = \lim_{n \to +\infty} \overline{S_n}$$

Thm / Def. Si $f \in C^0([a,b])$ alors $\underline{S} = \overline{S} =: S$. Ce nombre S est appelé l'intégrale définie de f sur $[a,b]$. On note

$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

Remarque : x est une variable muette, ie $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

Explication du Thm : La continuité de f sur $[a,b]$ implique (hors-programme)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\quad 0 \leq M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$ ("continuité uniforme")

Ceci implique :

$$0 \leq \overline{S_n} - \underline{S_n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \overline{S_n} - \underline{S_n} = 0$ et donc $\overline{S} = \underline{S}$. ■

8.3 Propriétés des intégrales définies

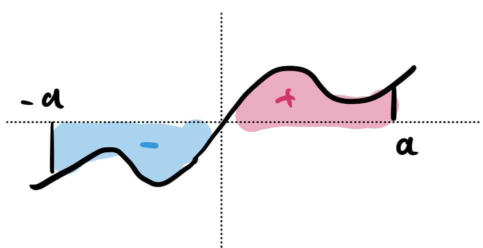
Convention :
- Si $a = b$, $\int_a^b f(x)\,dx = 0$
- Si $b < a$, $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Soient $f, g \in C^0([a,b])$ avec $a < b$.

Propriété 1 : linéarité de l'intégrale. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Propriété 2 : Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$



: les aires + et − s'annulent.

fin cours 08/12