Corrigé 13 : mouvement relatif

1 Mouvements relatifs

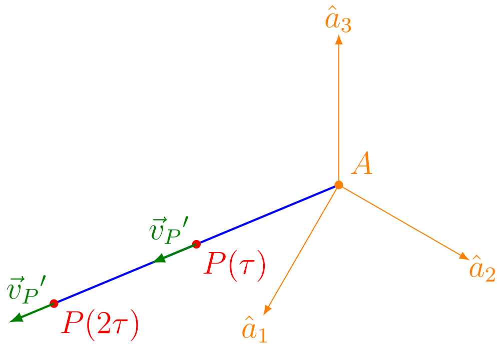
Rappel : les accélérations $\vec{a}_P$ (relativement à $\mathcal{O}$) et $\vec{a}_P{}'$ (relativement à $\mathcal{A}$) sont liées, en absence de rotation, par

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_P{}' \,.$$

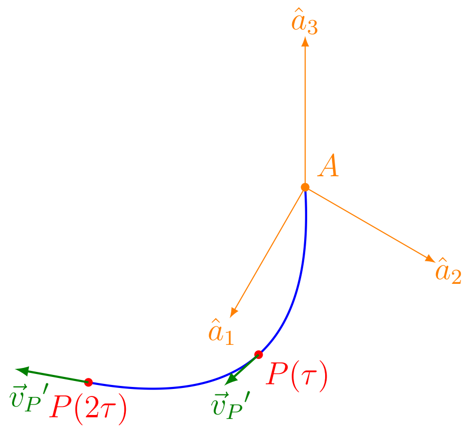
P se déplaçant à vitesse constante relativement à $\mathcal{O}$, nous avons $\vec{a}_P = \vec{0}$ et donc

$$\vec{a}_P{}' = -\vec{a}_A \,.$$

a) P est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{A}$. En effet, A se déplaçant à vitesse constante relativement à $\mathcal{O}$, $\vec{a}_P{}' = -\vec{a}_A = \vec{0}$.



b) P est en mouvement uniformément accéléré par rapport à $\mathcal{A}$ et sa trajectoire est donc une parabole. En effet, A se déplaçant avec une accélération $\vec{a}_A$ relativement à $\mathcal{O}$, nous avons $\vec{a}_P{}' = -\vec{a}_A$.
$\vec{a}_P{}'$ est un vecteur directeur de l'axe de la parabole.



2 Un paquet arrive...

1. Pendant la « chute » du paquet de durée t_c, la planète effectue un tour complet :

$$v_0 t_c = H = 2\pi R \text{ et } \omega_0 t_c = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = \frac{v_0}{R}\,.$$

Au moment de l'impact, les repères $(O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3)$ et $(A\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3)$ coïncident.

2. Vitesse du paquet lors de l'impact

   — relativement à $\mathcal{O}$: le paquet est en mouvement rectiligne uniforme et donc $\vec{v}_P = \vec{v}_0$

   — relativement à $\mathcal{A}$: la vitesse relative $\vec{v}_P{}'$ est donnée par

$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_A}_{\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{v}_P{}'$$

   où $\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$ est appelée vitesse d'entraînement. Dans le cas présent

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} = \omega_0 R \hat{e}_2 = v_0 \hat{e}_2\,.$$

   Ainsi $\vec{v}_P = -v_0\hat{e}_1 = v_0\hat{e}_2 + \vec{v}_P{}'$ et donc

$$\vec{v}_P{}' = -v_0(\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = -v_0(\hat{a}_1 + \hat{a}_2)\,.$$

3. Trajectoires : voir dessins.

4. Accélération du paquet lors de l'impact :

$$\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})}_{\text{entraînement}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}'}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{a}_P{}'}_{\text{relatif}}\,,$$

avec $\vec{a}_P = \vec{0}$.

L'accélération d'entraînement est

$$\vec{a}_P{}^{\text{e}} = \underbrace{\vec{a}_A}_{\vec{0}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})}_{\text{centripète}} = -\omega_0 v_0 \hat{e}_1 = -\frac{v_0^2}{R}\hat{e}_1 = -\frac{v_0^2}{R}\hat{a}_1\,.$$

L'accélération de Coriolis est

$$\vec{a}_P{}^{\text{c}} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}' = -2\omega_0 v_0\, \hat{e}_3 \wedge (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = 2\frac{v_0^2}{R}(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)\,.$$

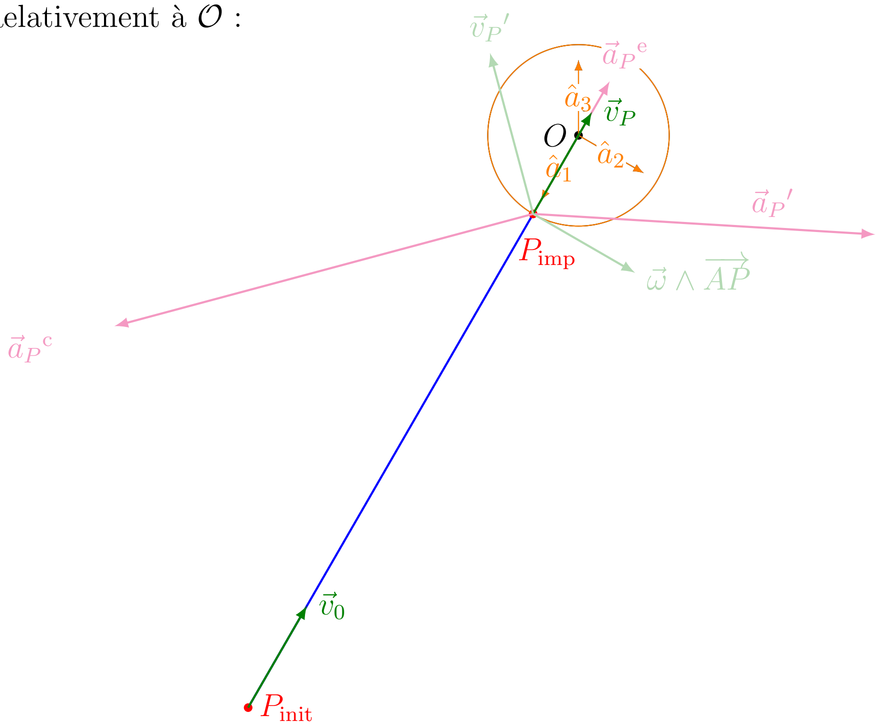
Ainsi

$$\vec{0} = \vec{a}_P{}^{\text{e}} + \vec{a}_P{}^{\text{c}} + \vec{a}_P{}'$$

et donc

$$\vec{a}_P{}' = -\vec{a}_P{}^{\text{e}} - \vec{a}_P{}^{\text{c}} = \frac{v_0^2}{R}(-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2)\,.$$

Relativement à $\mathcal{O}$:



Relativement à $\mathcal{A}$: