Corrigé Série 13 : Mouvement relatif

Question conceptuelle : Coriolis dans votre lavabo

L'accélération de Coriolis s'exprime à partir de l'équation suivante :

$$\vec{a}_{\text{Coriolis}} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} \tag{1}$$

où $\vec{\Omega}$ est la vitesse de rotation de la Terre et $\vec{V}$ la vitesse de l'eau dans le lavabo. On obtient l'expression suivante pour la norme de l'accélération de Coriolis :

$$a_{\text{Coriolis}} = 2\Omega V \sin\theta \tag{2}$$

avec $\Omega = \frac{2\pi}{86400\,\text{s}}$ la norme la vitesse de rotation de la Terre, $V = 1\,\text{m/s}$ la norme la vitesse de l'eau dans le lavabo et θ l'angle entre les vecteurs $\vec{\Omega}$ et $\vec{V}$. On peut donc écrire

$$a_{\text{Coriolis}} \leq 2\Omega V\,. \tag{3}$$

Application numérique : $a_{\text{Coriolis}} \leq 2 \times \frac{2\pi}{86400\text{ s}} \times \frac{1\text{ m}}{\text{s}} = 1.5 \times 10^{-4}\text{ ms}^{-2}$.
L'accélération de Coriolis est environ 10^5 fois plus petite que g. La moindre dissymétrie de la surface du réservoir va beaucoup plus influencer l'écoulement que la force de Coriolis elle-même.

1 Le rameur

Le problème est à une seule dimension. On considère le référentiel de la terre (absolu) lié à un repère Ox, où O est un point de la rive du fleuve et l'axe x dirigé dans le sens du courant, ainsi que le référentiel du fleuve (relatif) lié à un repère Ay, où A est un point du fleuve et l'axe y est parallèle à x.
La vitesse absolue du fleuve par rapport à Ox est v_f, et la norme de la vitesse relative du rameur par rapport au fleuve est v_r. La bouteille, une fois détachée du bateau, a une vitesse nulle relativement au fleuve.
De manière générale, la loi de transformation des vitesses pour un point P est

$$\vec{v}_P = \vec{v'}_P + \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}\,, \tag{4}$$

où $\vec{v}_P$ est la vitesse absolue, $\vec{v'}_P$ la vitesse relative, $\vec{v}_A$ la vitesse absolue du point A, et $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire. Dans ce problème à une dimension, $\omega = 0$, $v'_P = \pm v_r$, et $v_A = v_f$, et donc

$$v_P = \pm v_r + v_f\,. \tag{5}$$

Quand le rameur remonte le courant, sa vitesse relative est $-v_r$, et sa vitesse absolue est $v_P = -v_r + v_f$. La distance parcourue durant un temps t_1 est donc $x_{1,\text{ram.}} = (-v_r + v_f)t_1$.
Remarque : $x_{1,\text{ram.}}$ est négatif si v_P est négatif.
Quand le rameur suit le courant, sa vitesse relative est $+v_r$, et sa vitesse absolue est $v_P = +v_r + v_f$. La distance parcourue durant un temps t_2 est donc $x_{2,\text{ram.}} = (v_r + v_f)t_2$.

La position absolue $x_{\text{ram.}}$ du rameur après un temps $t_1 + t_2$ est donc

$$x_{\text{ram.}}(t_1 + t_2) = x_{1,\text{ram.}} + x_{2,\text{ram.}} = (-v_r + v_f)t_1 + (v_r + v_f)t_2 = v_r(t_2 - t_1) + v_f(t_1 + t_2)\,. \quad (6)$$

La bouteille a une vitesse relative nulle, et donc sa vitesse absolue est égale à la vitesse v_f du fleuve. Après un temps $t_1 + t_2$, sa position est donc

$$x_{\text{bout.}}(t_1 + t_2) = v_f(t_1 + t_2)\,. \quad (7)$$

Puisque après le temps $t_1 + t_2$ le rameur et la bouteille ont la même coordonnée absolue ($x_{\text{ram.}} = x_{\text{bout.}} = x$), on peut égaliser les équations (6) et (7). On en déduit que $t_1 = t_2 \equiv t$. En substituant ce résultat dans l'équation (7), on trouve

$$x = v_f 2t \Rightarrow v_f = \frac{x}{2t}\,. \quad (8)$$

Numériquement, on obtient

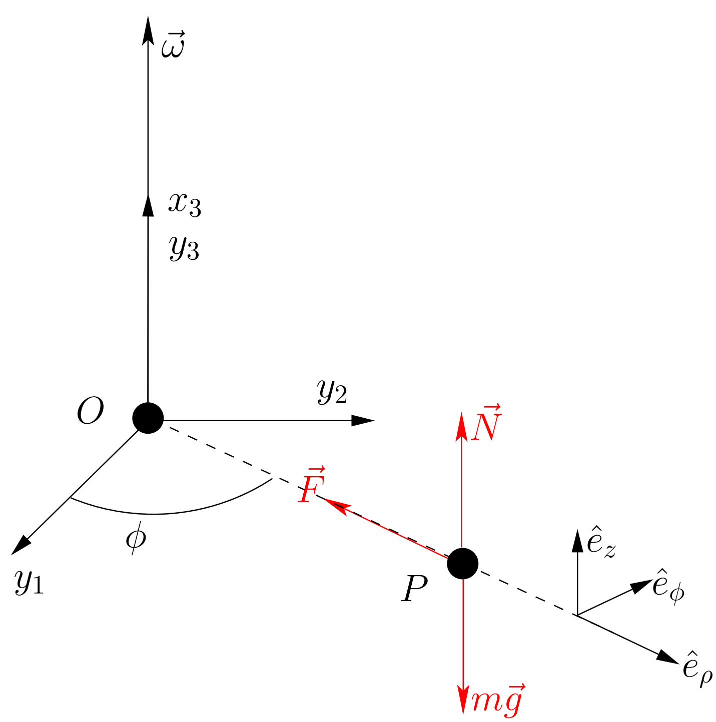
$$v_f = \frac{1 \text{ km}}{2 \text{ heures}} = 0.5 \text{ km/h}\,.$$

Solution alternative :

Plaçons-nous dans un référentiel lié à la bouteille (ou au fleuve). Dans ce cas, tout se passe comme si l'on se trouvait sur un lac (sans courant). La vitesse du rameur dans ce référentiel est v_r et ne dépend pas de la direction dans laquelle il se déplace (rappelons-nous que tout se passe comme si c'était un lac !). Le rameur s'éloigne donc de la bouteille pendant une heure. Il constate alors la perte et revient en arrière. Il doit donc à nouveau ramer pendant une heure pour rattraper la bouteille, qui n'a pas bougé dans notre référentiel !

Donc deux heures se seront écoulées entre le moment où la bouteille se détache et le moment où le rameur la récupère. Si dans un référentiel lié à la rive (ou au pont) la bouteille a parcouru 1 km, c'est donc que sa vitesse (égale à celle du fleuve) est de 0.5 km/h.

2 Coureur sur carrousel



On définit, dans la référentiel absolu lié à la Terre, un repère fixe $Ox_1x_2x_3$, où O est le centre du carrousel et où l'axe x_3 est vertical vers le haut.
Le référentiel relatif du carrousel tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\hat{x}_3$ relativement au référentiel de la Terre. On définit un repère $Oy_1y_2y_3$ fixe dans le référentiel du carrousel, avec l'axe y_3 parallèle à x_3. Dans ce repère, on choisit les coordonnées cylindriques pour déterminer la position du coureur.
Dans le référentiel tournant, la position du coureur est $\overrightarrow{OP} = R\hat{e}_\rho$, la vitesse relative du coureur est $\vec{v}_{\text{rel}} = v\hat{e}_\phi$, et l'accélération relative est $\vec{a}_{\text{rel}} = \frac{d\vec{v}_{\text{rel}}}{dt} = v\dot{\hat{e}}_\phi = v(\Omega\hat{e}_z \wedge \hat{e}_\phi)$, où $\Omega\hat{e}_z$ est la vitesse angulaire du coureur dans le référentiel tournant. Comme $v = R\Omega$, on a

$$\vec{a}_{\text{rel}} = -\frac{v^2}{R}\hat{e}_\rho\,. \tag{9}$$

L'accélération centripète $\vec{a}_{\text{cen}}$ et l'accélération de Coriolis $\vec{a}_{\text{Cor}}$ sont

$$\vec{a}_{\text{cen}} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) = \omega\hat{e}_z \wedge R\omega\hat{e}_\phi = -R\omega^2\hat{e}_\rho\,, \tag{10}$$

et

$$\vec{a}_{\text{Cor}} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2\omega\hat{e}_z \wedge v\hat{e}_\phi = -2\omega v\hat{e}_\rho\,. \tag{11}$$

L'accélération absolue du coureur dans le référentiel fixe est donc

$$\vec{a}_{\text{abs}} = \vec{a}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{cen}} + \vec{a}_{\text{Cor}} = -\left(\frac{v^2}{R} + R\omega^2 + 2\omega v\right)\hat{e}_\rho = -\frac{(v+R\omega)^2}{R}\hat{e}_\rho\,. \tag{12}$$

Les forces qui s'exercent sur le coureur sont :

— le poids $\vec{P} = -mg\hat{e}_z$ du coureur, perpendiculaire au plan du carrousel.

— la force de soutien $\vec{N} = N\hat{e}_z$ normale au carrousel.

— la force $\vec{F}$ parallèle au sol, due au frottement statique des pieds du coureur sur le carrousel.

On applique la deuxième loi de Newton

$$\Sigma F^{\text{ext.}} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}_{\text{abs}} \tag{13}$$

et on trouve que la force $\vec{F}$ est dirigée selon $\hat{e}_\rho$:

$$\vec{F} = m\vec{a}_{\text{abs}} = -m\frac{(v+R\omega)^2}{R}\hat{e}_\rho\,. \tag{14}$$

3 Horloge comtoise

Soit $Oxyz$ un repère avec l'axe x vertical vers le bas, l'axe y horizontal dans le plan du balancement. Le balancier tourne donc autour de l'axe Oz. On repère la position du balancier par l'angle ϕ entre sa tige et la verticale. Les forces subies par le balancier sont le poids vertical en G et une force de soutien en O exercée par l'axe du balancier. On applique le théorème du moment cinétique par rapport au point fixe O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} \tag{15}$$

L'axe z est un axe principal d'inertie, car il est perpendiculaire à un plan de symétrie du balancier. On a donc

$$\vec{L}_O = I_z\vec{\omega}\,, \tag{16}$$

où $\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{e}_z$ est la vitesse angulaire de rotation. Le théorème du moment cinétique (15) donne donc l'équation du mouvement suivante :

$$I_z \ddot{\phi}\, \hat{e}_z = -mgd \sin\phi\, \hat{e}_z \,. \tag{17}$$

Pour des petites oscillations ($\phi \ll 1 \Rightarrow \sin\phi \simeq \phi$), le mouvement est harmonique,

$$\ddot{\phi} = -\frac{mgd}{I_z}\phi \,, \tag{18}$$

de période

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgd}} \,. \tag{19}$$

A l'aide du théorème de Steiner on exprime

$$I_z = I_{\text{disque}} + Md^2 \,, \tag{20}$$

où I_{disque} est le moment d'inertie du disque autour d'un axe parallèle à z passant par G :

$$I_{\text{disque}} = \begin{cases} \frac{1}{2}MR^2 & \text{quand le disque est dans le plan } xy \\ & \text{(position normale)} \\ \frac{1}{4}MR^2 & \text{quand le disque est dans un plan} \\ & \text{perpendiculaire à } xy \text{ (position tournée)} \end{cases} \tag{21}$$

Lorsque le disque est tourné, le moment d'inertie et donc la période diminuent, ce qui fait avancer l'horloge plus vite.