

Série 17

Pour le 1er février 2023

Exercice 1

On considère le \mathbb{R} -espace vectoriel $V = \mathbb{R}[x]^{\leq 1}$ des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 1 . Montre que $(1+x, 1-x)$ forme une base de V et utilise-la pour construire un isomorphisme $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Indication. Définis d'abord l'image des vecteurs (ici ce sont des polynômes) de base, puis "étend par linéarité" pour définir $\alpha(ax+b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

On considère l'application linéaire *trace*, $\text{Tr} : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, définie par

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d.$$

- Choisis les bases canoniques de $M_2(\mathbb{C})$ et de \mathbb{C} pour construire la matrice de la trace.
- Calcule $\ker \text{Tr}$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ et $\alpha : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ l'application définie par $\alpha(X) = AX$.
Montre que α est linéaire et calcule sa matrice (pour la base canonique).
- Soit $\beta : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ la composition $\text{Tr} \circ \alpha$. Explique pourquoi cette application est linéaire et calcule sa matrice (pour les bases canoniques).
- Calcule le rang de β en fonction des coefficients a, b, c et d de la matrice A .

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x; y; z) = (x + y + z; x - 2y)$.

- Montre que $g_1 = (1; 0; 0)$, $g_2 = (0; 0; 1)$ et $g_3 = (-2; 1; 1)$ forment une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 .
- Montre que $u_1 = (1; 1)$ et $u_2 = (1; 0)$ forment une base \mathcal{C} de \mathbb{R}^2 .
- Trouve la matrice de f par rapport aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 .
- Trouve la matrice de f par rapport aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} .

Exercice 4

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- Le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} est isomorphe à \mathbb{R}^2 .
- Le \mathbb{F}_7 -espace vectoriel $M_2(\mathbb{F}_7)$ est isomorphe au \mathbb{F}_{11} -espace vectoriel $\mathbb{F}_{11}[x]^{\leq 3}$.
- Le produit AB , où $A \in M_{n \times 1}(K)$ et $B \in M_{1 \times n}(K)$ est une matrice $n \times n$ dont le rang vaut *au plus* 1.
- Lorsque $\alpha : V \rightarrow W$ et $\beta : W \rightarrow U$ sont non-nulles, le rang de $\beta \circ \alpha$ vaut *au moins* 1.
- La matrice de la dérivation $D : \mathbb{R}[x]^{\leq 4} \rightarrow \mathbb{R}[x]^{\leq 4}$ est inversible (rappelons que $D(p(x)) = p'(x)$).

Exercice 5

Soit $\alpha : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\alpha(x; y; z; t) = (x + y + z + t; x + 2y - t; x - y + 3z + 5t).$$

a) Trouve la matrice A telle que $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z + t \\ x + 2y - t \\ x - y + 3z + 5t \end{pmatrix}$.

b) Calcule $\alpha(1; 2; 2; -1)$, $\alpha^{-1}(1; 3; -3)$ et $\alpha^{-1}(0; 0; 0)$.

c) Calcule l'image par α du sous-espace $\langle (1; 2; 2; -1), (1; 1; 0; 0) \rangle$.

Exercice 6

Soient $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\beta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ les applications linéaires données par $\alpha(x; y) = (2x+y; x-y; 3x)$ et $\beta(a; b; c) = (a+b-c; b+2c)$. On utilise les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

- Calcule les matrices A de α et B de β .
- Calcule la matrice de $\beta \circ \alpha$.
- Calcule le rang de $\beta \circ \alpha$.

Exercice 7

Soient $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ les applications linéaires données par

$$\alpha(x; y; z) = (2x + y + z; y - z) \text{ et } \beta(a; b) = (a + b; a - b; b).$$

On utilise les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

- Calcule les matrices A de α et B de β .
- Calcule la matrice de $\beta \circ \alpha$.
- Calcule le rang de $\beta \circ \alpha$.

Exercice 8

Les matrices suivantes sont-elles inversibles? Attention, on ne demande pas de calculer l'inverse s'il existe, mais seulement d'expliquer pourquoi telle matrice est ou n'est pas inversible!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Indication. Tu pourras considérer ces matrices comme étant celles d'applications linéaires et travailler avec les vecteurs colonnes de ces matrices.

Exercices théoriques**Exercice 9**

Soit V un K -espace vectoriel et $\alpha : V \rightarrow V$ un isomorphisme (linéaire). Montre que l'application réciproque $\alpha^{-1} : V \rightarrow V$ est K -linéaire. Est-ce un isomorphisme?

Exercice 10

Opérations élémentaires. On travaille avec des matrices A , $E_{ij}(\lambda)$, P_{ij} et $D_i(\mu)$ de $M_n(K)$.

- a) Montre que $E_{ij}(\lambda)E_{ij}(\mu) = E_{ij}(\lambda + \mu)$ et calcule l'inverse de la matrice $E_{ij}(1)$.
- b) Calcule $E_{ij}(\lambda)E_{jk}(1)E_{ij}(-\lambda)E_{jk}(-1)$.
- c) Décris la matrice $AE_{ij}(\lambda)$.
- d) Décris la matrice $AD_i(\mu)$.
- e) Décris la matrice AP_{ij} .

Exercice 11

Soient $A, B \in M_n(K)$. Montre que BA est une matrice inversible si et seulement si A et B sont inversibles.

Une piste possible. Si BA est inversible, considérer les applications linéaires $\alpha : K^n \rightarrow K^n$ et $\beta : K^n \rightarrow K^n$ dont A et B sont les matrices, respectivement. Le but est de montrer que α et β sont des isomorphismes. On peut le faire par exemple en calculant le noyau de α et l'image de β .