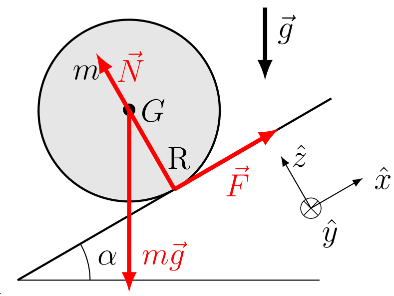
Corrigé du Minitest 5

Démarrage en côte (16 points)

a) (9 points au total)



On étudie le système constitué du cylindre, dans un référentiel lié au plan incliné, considéré comme un référentiel d'inertie. Les forces extérieures sont :

- la pesanteur $m\vec{g} = -mg\sin\alpha\,\hat{x} - mg\cos\alpha\,\hat{z}$, qui s'exerce en G.
- la force de frottement $\vec{F} = F\,\hat{x}$, qui s'applique en A, le point de contact du cylindre avec la route.
- la force de liaison sur le support $\vec{N} = N\,\hat{z}$, qui s'applique en A.

1 point -0.5 par force manquante. -0.5 si un point d'application est faux. A

Accepter la force de frottement avec un signe opposé.

En plus, il y a un moment de force extérieure $\vec{M}_G$.

Les équations du mouvement s'écrivent à partir du théorème de centre de masse et du théorème du moment cinétique : 1 point B

$$\begin{cases} m\vec{a}_G & = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} \\ \frac{d\vec{L}_G}{dt} & = \vec{GA} \wedge (\vec{N} + \vec{F}) + \vec{M}_G \end{cases} \tag{1}$$

Avec la contrainte d'un mouvement du cylindre en contact avec la pente, $\vec{a}_G = \ddot{x}_G\,\hat{x}$, le théorème du centre de masse en projection sur le repère donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G & = F - mg\sin\alpha \\ 0 & = N - mg\cos\alpha \end{cases} \quad \boxed{\text{1 point}}\ \text{C} \tag{2}$$

Soit $\vec{\omega}$ le vecteur vitesse de rotation. On a un mouvement plan sur plan (le plan de coupe du cylindre reste dans le plan x, z du référentiel), donc $\vec{\omega} = \omega\hat{y}$. Soit $I_\Delta = \frac{1}{2}mR^2$ le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de symétrie. L'axe passant par G parallèle à y est un axe principal d'inertie du cylindre, donc

$$\vec{L}_G = I_G\vec{\omega} = \frac{1}{2}mR^2\omega\,\hat{y} \quad \boxed{\text{1 point (donner le point si } \vec{\omega} = -\omega\hat{y} \text{ a été utilisé)}}\ \text{D} \tag{3}$$

Les moments des forces par rapport à G donnent :

$$\vec{GA} \wedge (\vec{N} + \vec{F}) = (-R\,\hat{z}) \wedge F\,\hat{x} = -FR\hat{y} \quad \boxed{\text{1 point}}\ \text{E} \tag{4}$$

Donc le théorème du moment cinétique s'écrit en projection sur y :

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\omega} = -RF + \mathcal{C} \tag{5}$$

La condition de non-glissement impose que $\vec{v}_A = \vec{0}$, et donc :

$$\vec{v}_G = \dot{x}_G\,\hat{x} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AG} = \omega R\,\hat{x}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{F}} \tag{6}$$

On en déduit que $\dot{\omega} = \ddot{x}_G/R$, et l'équation du mouvement obtenue par le théorème du moment cinétique devient

$$\frac{1}{2}mR\ddot{x}_G = -RF + \mathcal{C}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{G}} \tag{7}$$

Le théorème du centre de masse, Eq. (2), donne l'expression des forces F et N :

$$\begin{cases} F &= m\ddot{x}_G + mg\sin\alpha \\ N &= mg\cos\alpha \end{cases} \tag{8}$$

On remplace F dans l'Eq. (7) par sa valeur extraite du théorème du centre de masse, et on obtient un équation différentielle pour x_G :

$$\frac{1}{2}mR\ddot{x}_G = -R(m\ddot{x}_G + mg\sin\alpha) + \mathcal{C} \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{H}} \tag{9}$$

$$\frac{3}{2}mR\ddot{x}_G = -mRg\sin\alpha + \mathcal{C} \tag{10}$$

$$\ddot{x}_G = -\frac{2}{3}g\sin\alpha + \frac{2\mathcal{C}}{3mR}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{I}} \tag{11}$$

b) (4 points au total)

Avec la condition initiale $\dot{x}_G(0) = 0$, la solution pour la vitesse est

$$\dot{x}(t) = \left(-\frac{2}{3}g\sin\alpha + \frac{2\mathcal{C}}{3mR}\right)t\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{J}} \tag{12}$$

La condition pour que le cylindre remonte la pente est que l'accélération du centre de masse soit positive :

$$\ddot{x}_G = -\frac{2}{3}g\sin\alpha + \frac{2\mathcal{C}}{3mR} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{C} > Rmg\sin\alpha\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{K}} \tag{13}$$

De plus, le roulement est sans glissement si $|F| \leq \mu_s N$ $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{L}}$. Avec l'Eq. (8), on obtient

$$m\ddot{x}_G + mg\sin\alpha \leq \mu_s mg\cos\alpha\,, \tag{14}$$

et en remplaçant $\ddot{x}_G$ avec expression trouvée dans l'Eq. (11) on obtient

$$m\left(-\frac{2}{3}g\sin\alpha + \frac{2\mathcal{C}}{3mR}\right) + mg\sin\alpha \leq \mu_s mg\cos\alpha \tag{15}$$

$$\frac{2\mathcal{C}}{3R} \leq \mu_s mg\cos\alpha - \frac{1}{3}mg\sin\alpha \tag{16}$$

$$\mathcal{C} \leq \frac{Rmg}{2}\left(3\mu_s\cos\alpha - \sin\alpha\right) \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{M}} \tag{17}$$

La condition pour que le cylindre remonte la pente sans glisser et donc

$$Rmg\sin\alpha < \mathcal{C} \leq \frac{Rmg}{2}\left(3\mu_s\cos\alpha - \sin\alpha\right)\,. \tag{18}$$

c) (3 points au total)

On considère maintenant la situation dans laquelle il y a glissement en A. Notons $\vec{v}_A = v_A \hat{x}$. Le théorème du centre de masse appliqué au cylindre donne les mêmes équations que l'Eq. (2). Dans le cas avec glissement on a

$$||\vec{F}|| = \mu_c ||\vec{N}|| \implies |F| = \mu_c mg\cos\alpha\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{N}} \tag{19}$$

Le signe de F est opposé à celui de v_A. Dans notre cas, $\mathcal{C} > 0$, donc $v_A < 0$ et $F > 0$. On a donc :

$$m\ddot{x}_G = \mu_c mg\cos\alpha - mg\sin\alpha\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{O}} \tag{20}$$

Pour que le cylindre remonte la pente avec la condition initiale $v_G(0) = 0$, il faut et il suffit que $\ddot{x}_G > 0$. On obtient $\mu_c > \tan\alpha$. $\boxed{\text{1 point 0.5 pour la condition } \ddot{x}_G > 0\text{, 0.5 pour le résultat}}_{\mathrm{P}}$.