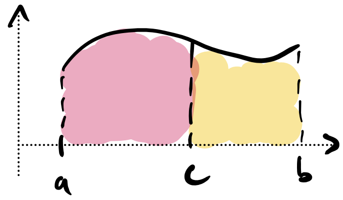
(Relation de Chasles)
Propriété 3. Si $c \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



Propriété 4 (Monotonie de l'intégrale)

Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

En particulier : $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ car $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$

Propriété 5 :

Thm (Théorème de la moyenne). Soit $f \in C^0([a,b])$, alors $\exists u \in]a,b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(u)$$

Rmq : $f(u) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est la moyenne de f sur $[a,b]$.

Thm (Théorème de la moyenne généralisé). Soit $f, g \in C^0([a,b])$ avec $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Alors $\exists u \in]a,b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(u)\int_a^b g(x)\,dx$$

→ Pour $g(x) = 1$, $\forall x \in [a,b]$, on retrouve le Thm. de la moyenne.

Preuve: Soient m et M le min et le max de f sur $[a,b]$.
Comme $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$,

$$m \cdot g(x) \leq f(x)\cdot g(x) \leq M\cdot g(x) \quad , \forall x \in [a,b]$$

Par monotonie de l'intégrale :

$$\int_a^b m \cdot g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \leq \int_a^b M \cdot g(x)\,dx$$

Par linéarité : $m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$

Donc $\exists\, v \in [m, M]$, $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = v\int_a^b g(x)\,dx$

Or par le Thm. des valeurs intermédiaires, $\exists\, u \in]a,b[$ tel que $f(u) = v$ ce qui permet de conclure : $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(u)\int_a^b g(x)dx$ ∎

8.4 Thm. fondamental de l'analyse

Thm: Soit $f \in C^0([a,b])$, $a<b$. Alors :

1) La fonction $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f, c'est-à-dire $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

2) Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f, alors on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(Ce Thm fait le lien entre intégrales définies et indéfinies).

Preuve: (i) Soit $x \in]a,b[$ (pour $x=a$ ou $x=b$, faire le même raisonnement avec des limites à gauche ou à droite). On a :

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h}$$

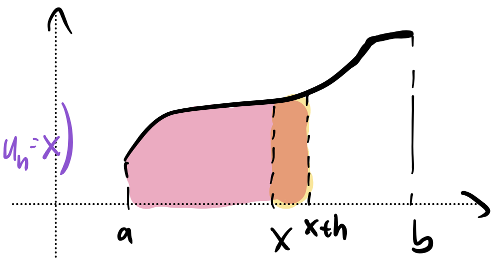
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \qquad \text{(par la Propriété 3 (Relation de Chasles))}.$$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(h f(u_h)\right)$ avec $u_h \in]x, x+h[$ par le Thm de la moyenne.

$= \lim_{h\to 0} f(u_h)$

$= f(x)$ par continuité de f (car $\lim_{h\to 0} u_h = x$)



(ii) Comme $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f (on vient de le montrer)
$\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = G(x) + C$, $\forall x \in [a,b]$.

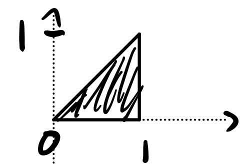
Que vaut C?

- En a : $F(a) = \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} + C$ donc $C = F(a)$
- En b : $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + C = \int_a^b f(t)\,dt + F(a)$ ∎

$\Rightarrow$ le calcul d'intégrales revient à la recherche de primitives

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ex : $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$



8.5 Méthodes d'intégration

8.5.1 Méthode directe

→ Reconnaître une primitive de la fonction à intégrer (cf. tableau).

Ex : 1) $\int_0^1 a^x\,dx = \int_0^1 \exp(x \log(a))\,dx$ où $a > 0$ et $a \neq 1$ est un paramètre.

$$= \frac{1}{\log(a)} \cdot \int_0^1 \log(a) \cdot \exp(x\log(a))\,dx$$

$$= \frac{1}{\log(a)} \left[\exp(x\log(a))\right]_0^1 = \frac{1}{\log(a)}(a-1)$$

2) $\int_0^{\pi/4} \tan(x)\,dx = -\int_0^{\pi/4} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$ on reconnaît $\frac{f'}{f} = (\log(f))'$

$= -\left[\log(\cos(x))\right]_0^{\pi/4}$

$= -\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \log(1) = \frac{1}{2}\log(2)$

3) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)^2\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos(2x))\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{\pi}{4}$

8.5.2 Changement de variable

Thm. Soit $f \in C^0(I)$, I intervalle et $[a,b] \subset I$.

Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ telle que $\begin{cases} \varphi \in C^1([\alpha,\beta]) \\ \varphi(\alpha) = a \text{ et } \varphi(\beta) = b \end{cases}$

Alors : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

Mnémotechnique : $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{cases}$ + changer les bornes d'intégration.

Preuve : Soit F une primitive de f sur I et $G = F \circ \varphi$.

Soit $t \in [\alpha, \beta]$, on

$G'(t) = \varphi'(t) \cdot F'(\varphi(t)) = \varphi'(t) \cdot f(\varphi(t))$

Donc $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta G'(t)\,dt$

$= \left[G(t)\right]_\alpha^\beta$

$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$

$= \int_a^b f(x)\,dx$

$\blacksquare$

Exemple : $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

Posons $\begin{cases} x = \sin(u) \\ dx = \cos(u)\,du \end{cases}$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin(u)^2}\cos(u)\,du$$
$$= \int_0^{\pi/2} \cos(u)^2\,du = \frac{\pi}{4} \quad \text{(calcul ci-dessus)}$$

Par les intégrales indéfinies (calcul de primitives) :

> **Thm :** Soit I, J deux intervalles, $f \in C^0(I)$ et $\varphi : I \to J$, $\varphi \in C^1(I)$, φ bijection. Soit G une primitive de $(f \circ \varphi).\varphi'$ alors $G \circ \varphi^{-1}$ est une primitive de f sur I.

Explication :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du = G(\varphi^{-1}(x)) - \underbrace{G(\varphi^{-1}(a))}_{\text{constante que l'on peut ignorer.}}$$

Exemple : $F(x) = \int \sqrt{1-x^2}\,dx$

$x = \varphi(u) = \sin(u)$, $\varphi : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

$$G(u) = \int \underbrace{\cos(u)^2}_{f(\varphi(u))\varphi'(u) = \sqrt{1-\sin(u)^2}.\cos(u) = \cos(u)^2}\,du = \int \frac{1}{2}(1+\cos(2u))\,du$$
$$= \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sin u \underbrace{\cos u}_{\sqrt{1-\sin(u)^2}}$$

Donc $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

fin cours 12 décembre