Enseignant: Philippe Michel
Examen 2: Algèbre Linéaire Avancée, MATH-110
Date: Le 4 Mars 2021, 13h15-16h15
Durée: 3 heures

1

Michael Peter Balzary

SCIPER : **111111** Signature :

Attendez le début de l'examen avant de tourner la page.

Ce document est imprimé recto-verso, il contient 32 pages.

Ne pas dégrafer.

- Aucun document n'est autorisé.
- Une calculette simple (sans display graphique) est autorisée.
- Pour les questions à choix multiples:
  - entourez la bonne réponse (sans justification) et utilisez un stylo à encre noire ou bleue foncée; en cas d'erreur effacez proprement avec du correcteur blanc.
  - Une réponse incorrecte compte 0 mais n'entraine pas de point négatif.
- Pour les questions ouvertes:
  - Répondre dans l'espace dédié.
  - Vous pouvez utiliser un crayon à papier à condition d'écrire lisiblement;
  - Si vous utilisez des résultats du cours, citez-les explicitement.
  - Sauf mention explicite du contraire on a le droit d'admettre un résultat d'un autre exercice ou d'une question précédente du même exercice pour répondre à une question.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- L'examen est LONG mais il n'est pas nécessaire de le faire correctement intégralement pour obtenir la note maximale.

Exercice 1 (Questions de cours et QCM)**.** .

1. Enoncer le Théorème Noyau-Image.

2. Soit G un groupe et $H, K \subset G$ des sous-groupes distingués alors le sous-groupe engendré par H et K est distingué.

   Vrai Faux

3. Un produit d'anneaux intègres est intègre.

   Vrai Faux

4. Soit A un anneau fini (comme ensemble), commutatif et intègre et M un A-module de type fini, alors M est libre.

   Vrai Faux

5. Une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ de rang maximal est injective.

   Vrai Faux

6. Soit $A, B \in \mathrm{GL}_d(K)$ des matrices carrées inversibles alors $({}^t({}^tA.B^{-1}))^{-1}$ vaut

   • $A^{-1}.{}^tB$ • ${}^tB.A^{-1}$ • rien car ${}^t({}^tA.B^{-1})$ n'est pas forcément inversible

7. Le polynome caractéristique $P_{car,M}(X)$ de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$ vaut

   • $-X^3 - 3X^2 - 2X - 1$ • $X^3 - 3X^2 + 2X + 1$ • $X^3 - 3X^2 - 2X - 1$

Exercice 2. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{C}) := \{f : x \mapsto f(x)\}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ (le corps des nombres complexes). Soient

$$f_1(x) = \cos(x),\ f_2(x) = \sin(x),\ f_3(x) = \cos(3x),\ f_4(x) = \sin(3x)$$

et

$$V = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle \subset \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

le sous-espace vectoriel engendré par ces 4 fonctions.

1. Montrer que $\mathscr{B} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est une base de V. Pour cela on pourra évaluer une combinaison linéaire (nulle) de ces fonctions en des points bien choisis et faire de même pour la dérivée.

2. On considère l'application linéaire (admis) de V à valeurs dans $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{C})$

$$\varphi : f \in V \mapsto f'' + 2if' + 3f$$

   où f', f'' désignent la dérivée première et seconde de f. Montrez que $\varphi(f) \in V$. Ainsi φ défini un endomorphisme de V.

3. Donner la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ et calculer son polynôme caractéristique.

4. Trouver des bases de $\ker \varphi$ et de $\operatorname{Im} \varphi$.

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Exercice 3. Soit K un corps et U, V des espaces vectoriels sur K de dimensions (finies) d et d'. On notera U^*, V^* les espaces duaux. On notera

$$\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\} \subset U,\ \mathscr{B}' = \{\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_{d'}\} \subset V$$

des bases de U et V et

$$\mathscr{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\} \subset U^*,\ \mathscr{B}^{'*} = \{\mathbf{f}_1^*, \cdots, \mathbf{f}_{d'}^*\} \subset V^*$$

les bases duales.
Par ailleurs on fait la définition suivante:

Définition 3.1. Une forme bilinéaire B sur $U \times V$ est une fonction de l'espace produit $U \times V$ à valeurs dans K

$$B : \begin{array}{ccc} U \times V & \mapsto & K \\ (u, v) & \mapsto & B(u, v) \end{array}$$

telle que

- Pour tout $v \in V$, la fonction sur U à valeurs dans K

  $$u \in U \mapsto B(u, v) \in K$$

  est une forme linéaire.

- Pour tout $u \in U$, la fonction sur V à valeurs dans K

  $$v \in V \mapsto B(u, v) \in K$$

  est une forme linéaire.

On note $\mathrm{Bil}(U, V)$ l'ensemble de toutes les formes bilinéaires sur $U \times V$.

Dans la suite de cet exercice, on admettra que $\mathrm{Bil}(U, V)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(U \times V; K)$ des fonctions de $U \times V$ à valeurs dans K (pour la structure usuelle de K-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U \times V; K)$).

1. Soient $\ell \in U^*$ et $\ell' \in V^*$ des formes linéaires; montrer que la fonction

   $$\ell \otimes \ell' : (u, v) \in U \times V \mapsto \ell(u).\ell'(v) \in K$$

   est une forme bilinéaire sur $U \times V$.

2. Montrer que l'ensemble

   $$\mathscr{B}^* \otimes \mathscr{B}^{'*} := \{\mathbf{e}_i^* \otimes \mathbf{f}_j^*,\ i = 1, \cdots, d,\ j = 1, \cdots, d'\} \subset \mathrm{Bil}(U, V)$$

   forme une base de $\mathrm{Bil}(U, V)$. Quelle est la dimension de cet espace ?

3. On considère dorénavant le cas $U = V^*$. Soit $\mathrm{End}(V)$ l'espace des endomorphismes de V (ie. les applications K-linéaires de V sur V) et soit $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Montrer que la fonction sur $V^* \times V$ à valeurs dans K définie par

   $$B_\varphi : (\ell, v) \in V^* \times V \mapsto B_\varphi(\ell, v) = \ell(\varphi(v)) \in K$$

   est une forme bilinéaire sur $V^* \times V$.

4. Montrer que l'application de $\mathrm{End}(V)$ à valeurs dans $\mathrm{Bil}(V^*, V)$ définie par

   $$B_\bullet : \varphi \in \mathrm{End}(V) \mapsto B_\varphi \in \mathrm{Bil}(V^*, V)$$

   est linéaire et injective (pour ce dernier point on observera que les valeurs $B_\varphi(\mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_j)$ sont liées à la matrice de φ dans une base convenable).

5. Montrer que $\mathrm{End}(V)$ est isomorphe a $\mathrm{Bil}(V^*, V)$ (comme K-espace vectoriel).

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Exercice 4. Soit K un corps et $V = K^2$ le K-espace vectoriel de dimension 2. On rappelle qu'une droite (linéaire) $D \subset V$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1:

$$D = K.v = \{\lambda.v,\ \lambda \in K\}$$

où $v \in V - \{0_V\}$ est un vecteur non-nul. On note

$$\mathrm{P}^1(K) = \{D \subset K^2,\ \dim_K(D) = 1\}$$

l'ensemble des droites de K^2.

1. Montrer que $\mathrm{P}^1(K)$ est en bijection avec l'ensemble des vecteurs
$$\{v_\lambda := (1, \lambda),\ \ \lambda \in K\} \cup \{v_\infty := (0, 1)\} \subset V$$

2. Soit $\varphi \in \mathrm{GL}(V) \simeq \mathrm{GL}_2(K)$ une application K-linéaire inversible. On suppose que pour tout $v \in V$ il existe un scalaire $\lambda_v \in K$ tel que
$$\varphi(v) = \lambda_v.v.$$
Montrer qu'en fait les λ_v sont tous égaux à un même scalaire $\lambda \in K^\times$ de sorte que
$$\varphi = \lambda.\mathrm{Id}_V.$$

3. Soit $\varphi \in \mathrm{GL}(K^2)$ une application linéaire inversible (on ne fait pas d'autre hypothèse sur φ). Comme φ est linéaire, l'image d'une droite D par φ
$$\varphi(D) = \{\varphi(v'),\ v' \in D\}$$
est encore une droite (on ne demande PAS de le démontrer). On note
$$\sigma_\varphi : D \in \mathrm{P}^1(K) \mapsto \varphi(D) \in \mathrm{P}^1(K)$$
l'application correspondante sur l'ensemble des droites.
   (a) Montrer que σ_φ est une bijection de l'ensemble $\mathrm{P}^1(K)$ sur lui-même et que l'application
   $$\sigma_\bullet : \varphi \in \mathrm{GL}(K^2) \mapsto \sigma_\varphi \in \mathrm{Bij}(\mathrm{P}^1(K))$$
   est un morphisme de groupes.
   (b) Montrer que le noyau du morphisme ci-dessus vaut
   $$\ker(\sigma_\bullet) = K^\times.\mathrm{Id}_{K^2},$$
   ie. le groupe des multiples non-nuls de l'application identité (c.a.d les homothéties linéaires de K^2).

4. On suppose maintenant que $K = \mathbb{F}_p$ est le corps fini à p éléments (ici $p \geqslant 2$ est un nombre premier). Montrer les égalités suivantes
$$|\mathrm{P}^1(\mathbb{F}_p)| = p + 1,\ |\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)| = (p^2 - 1)(p^2 - p).$$
Pour la deuxieme égalité on pourra (au choix) soit compter le nombre de solutions de l'équation
$$ad - bc = 0_{\mathbb{F}_p},\ \ (a, b, c, d) \in \mathbb{F}_p^4,$$
soit raisonner à partir des vecteurs colonnes qui composent une matrice 2×2 inversible, soit trouver une autre méthode de comptage.

5. Montrer que pour $p = 2$, le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ est isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_3 = \mathrm{Bij}(\{1, 2, 3\})$ (ie. le groupe des permutations d'un ensemble de 3 éléments).

6. Donner un exemple de matrice $M_3 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ qui correspond à un cycle de longueur 3 par un tel isomorphisme.

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Exercice 5 (Le lemme de Schur)**.** Soit K un corps et V un K-espace vectoriel de dimension finie (non-nulle). Soit G un groupe fini et

$$\rho : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & \mathrm{GL}(V) \\ g & \mapsto & \rho_g \end{array}$$

un morphisme du groupe G vers le groupe linéaire de V; on notera $\rho_g \in \mathrm{GL}(V)$ l'image d'un élément $g \in G$ par le morphisme ρ.

Définition 5.1. On appelle *endomorphisme d'entrelacement*, une application K-linéaire de V sur V, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ qui commute avec tous les ρ_g:

$$\forall g \in G,\ \varphi \circ \rho_g = \rho_g \circ \varphi$$

et on note l' ensemble des endomorphismes d'entrelacement

$$\mathrm{End}_\rho(V) := \{\varphi \in \mathrm{End}(V),\ \forall g \in G,\ \varphi \circ \rho_g = \rho_g \circ \varphi\}.$$

Le *Lemme de Schur* qui est l'objet de cet exercice établit une propriété fondamentale de l' ensemble des endomorphismes d'entrelacement sous une hypothèse supplémentaire.

Définition 5.2. On dit que V est ρ-irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels de V qui sont stables par tous les ρ_g sont les sous-espaces vectoriels triviaux, c'est à dire $\{0_V\}$ et V: si $U \subset V$ est un sous-espace vectoriel de V qui satisfait

$$\forall g \in G,\ \rho_g(U) \subset U$$

alors $U = \{0_V\}$ ou $U = V$.

On rappelle également que le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos*, c'est à dire que tout polynôme unitaire de degré $d \geqslant 1$, $P(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1X + a_0$ admet au moins une racine complexe: il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{End}_\rho(V)$ est un sous-espace vectoriel ainsi qu' un sous-anneau de la K-algèbre $\mathrm{End}(V)$ (pour l'addition et la composition des endomorphismes).
2. *On suppose dans la suite que V est ρ-irréductible.* Montrer que tout élément non-nul φ de $\mathrm{End}_\rho(V)$ est inversible et que son inverse φ^{-1} appartient à $\mathrm{End}_\rho(V)$. Pour cela on considèrera (au choix) ou bien son noyau $\ker(\varphi) \subset V$ ou bien son image $\mathrm{Im}(\varphi) \subset V$ (ou bien les deux).
3. *On suppose (en plus de la ρ-irréductibilité que $K = \mathbb{C}$ est le corps des complexes.* Soit $\varphi \in \mathrm{End}_\rho(V)$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi_\lambda := \varphi - \lambda.\mathrm{Id}_V$ n'est pas inversible (pensez au polynôme caractéristique) et montrer qu'en fait
$$\varphi = \lambda.\mathrm{Id}_V.$$
4. *On suppose en plus du reste que G est un groupe commutatif.* Montrer que
   (a) pour tout $g \in G$, ρ_g appartient à $\mathrm{End}_\rho(V)$,
   (b) on a $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 1$.

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)