



Enseignant: Philippe Michel  
Examen 2: Algèbre Linéaire Avancée, MATH-110  
Date: Le 4 Mars 2021, 13h15-16h15  
Durée: 3 heures

# Michael Peter Balzary

SCIPER: **111111**

Signature: 

**Attendez le début de l'examen avant de tourner la page.**

**Ce document est imprimé recto-verso, il contient 32 pages.**

**Ne pas dégrafer.**

- Aucun document n'est autorisé.
- Une calculatrice simple (sans display graphique) est autorisée.
- Pour les questions à choix multiples:
  - entourez la bonne réponse (sans justification) et utilisez un stylo à encre noire ou bleue foncée; en cas d'erreur effacez proprement avec du correcteur blanc.
  - Une réponse incorrecte compte 0 mais n'entraîne pas de point négatif.
- Pour les questions ouvertes:
  - Répondre dans l'espace dédié.
  - Vous pouvez utiliser un crayon à papier à condition d'écrire lisiblement;
  - Si vous utilisez des résultats du cours, citez-les explicitement.
  - Sauf mention explicite du contraire on a le droit d'admettre un résultat d'un autre exercice ou d'une question précédente du même exercice pour répondre à une question.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- L'examen est LONG mais il n'est pas nécessaire de le faire correctement intégralement pour obtenir la note maximale.

**Exercice 1** (Questions de cours et QCM). .

1. Enoncer le Théorème Noyau-Image.



2. Soit  $G$  un groupe et  $H, K \subset G$  des sous-groupes distingués alors le sous-groupe engendré par  $H$  et  $K$  est distingué.

Vrai

Faux

3. Un produit d'anneaux intègres est intègre.

Vrai

Faux

4. Soit  $A$  un anneau fini (comme ensemble), commutatif et intègre et  $M$  un  $A$ -module de type fini, alors  $M$  est libre.

Vrai

Faux

5. Une application linéaire  $\varphi : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$  de rang maximal est injective.

Vrai

Faux

6. Soit  $A, B \in \text{GL}_d(K)$  des matrices carrées inversibles alors  $({}^t(A.B^{-1}))^{-1}$  vaut

- $A^{-1}.{}^tB$       •  ${}^tB.A^{-1}$       • rien car  $({}^t(A.B^{-1}))$  n'est pas forcément inversible

7. Le polynôme caractéristique  $P_{car,M}(X)$  de la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$  vaut

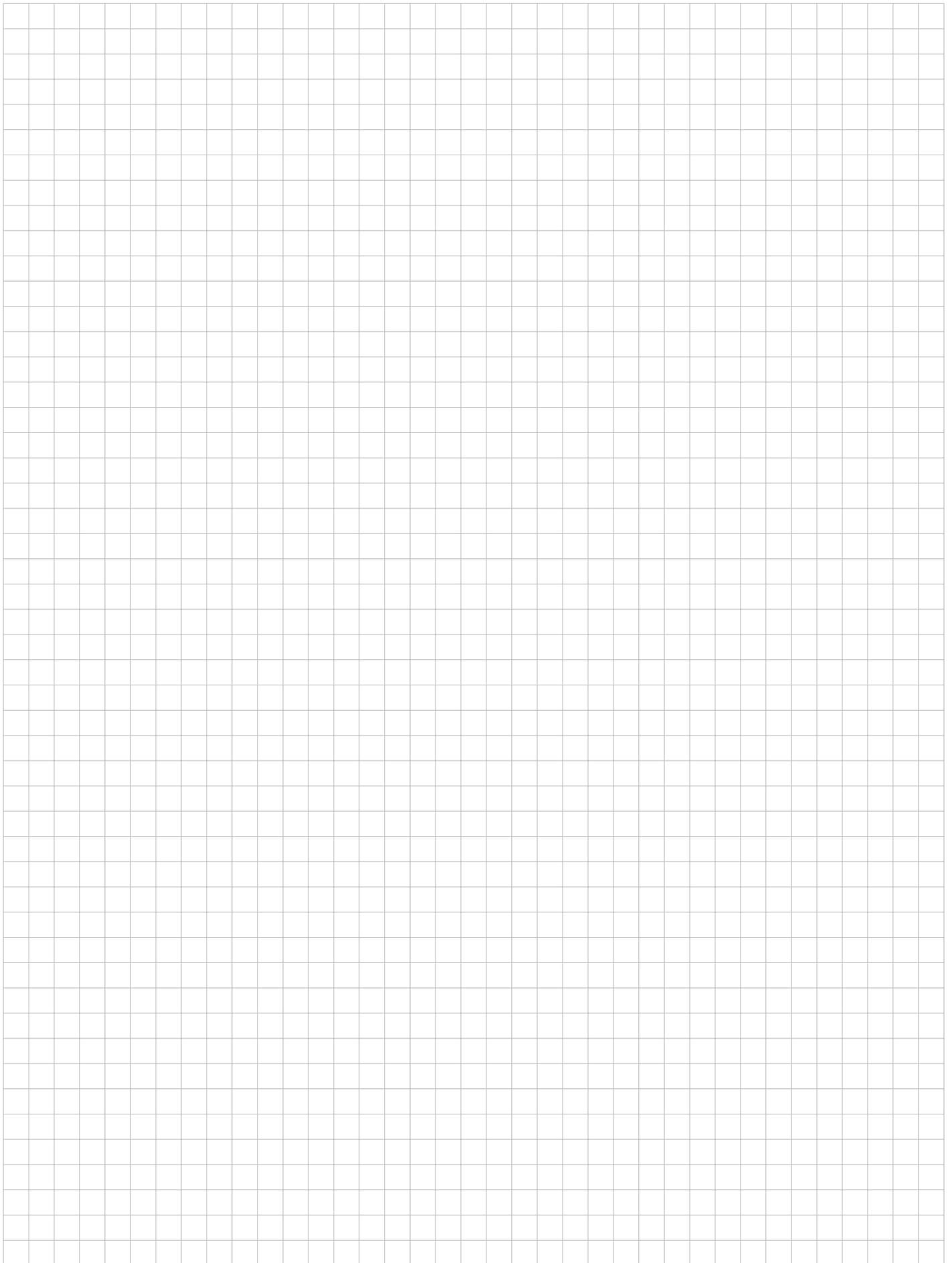
- $-X^3 - 3X^2 - 2X - 1$       •  $X^3 - 3X^2 + 2X + 1$       •  $X^3 - 3X^2 - 2X - 1$







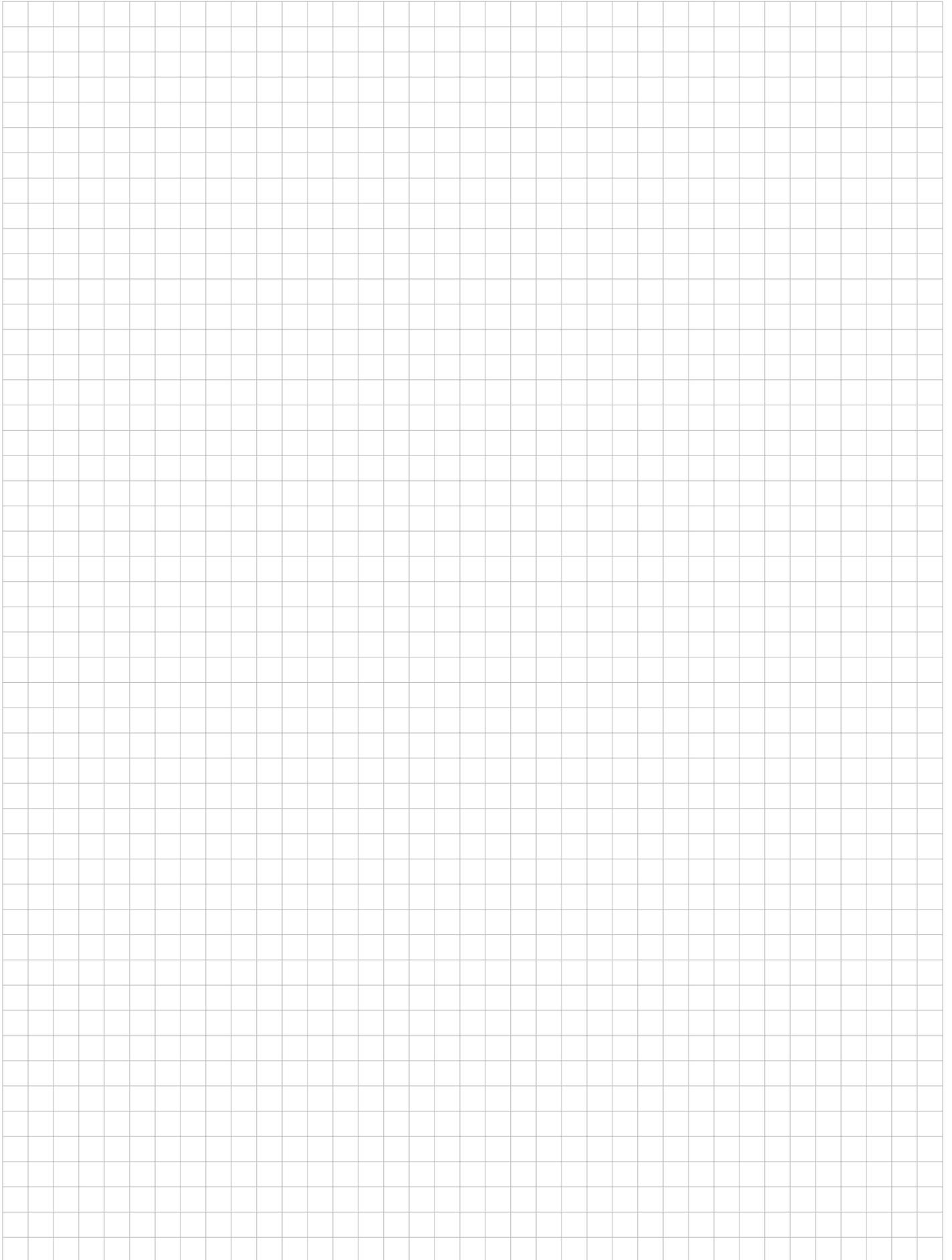
*Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 2.

*Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 2.

*Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 2.

*Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 2.

**Exercice 3.** Soit  $K$  un corps et  $U, V$  des espaces vectoriels sur  $K$  de dimensions (finies)  $d$  et  $d'$ . On notera  $U^*, V^*$  les espaces duaux. On notera

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\} \subset U, \quad \mathcal{B}' = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{d'}\} \subset V$$

des bases de  $U$  et  $V$  et

$$\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_d^*\} \subset U^*, \quad \mathcal{B}'^* = \{\mathbf{f}_1^*, \dots, \mathbf{f}_{d'}^*\} \subset V^*$$

les bases duales.

Par ailleurs on fait la définition suivante:

**Définition 3.1.** Une forme bilinéaire  $B$  sur  $U \times V$  est une fonction de l'espace produit  $U \times V$  à valeurs dans  $K$

$$B : \begin{array}{ll} U \times V & \mapsto K \\ (u, v) & \mapsto B(u, v) \end{array}$$

telle que

- Pour tout  $v \in V$ , la fonction sur  $U$  à valeurs dans  $K$

$$u \in U \mapsto B(u, v) \in K$$

est une forme linéaire.

- Pour tout  $u \in U$ , la fonction sur  $V$  à valeurs dans  $K$

$$v \in V \mapsto B(u, v) \in K$$

est une forme linéaire.

On note  $\text{Bil}(U, V)$  l'ensemble de toutes les formes bilinéaires sur  $U \times V$ .

Dans la suite de cet exercice, on admettra que  $\text{Bil}(U, V)$  est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathcal{F}(U \times V; K)$  des fonctions de  $U \times V$  à valeurs dans  $K$  (pour la structure usuelle de  $K$ -espace vectoriel de  $\mathcal{F}(U \times V; K)$ ).

1. Soient  $\ell \in U^*$  et  $\ell' \in V^*$  des formes linéaires; montrer que la fonction

$$\ell \otimes \ell' : (u, v) \in U \times V \mapsto \ell(u) \cdot \ell'(v) \in K$$

est une forme bilinéaire sur  $U \times V$ .

2. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}'^* := \{\mathbf{e}_i^* \otimes \mathbf{f}_j^*, i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, d'\} \subset \text{Bil}(U, V)$$

forme une base de  $\text{Bil}(U, V)$ . Quelle est la dimension de cet espace ?

3. On considère dorénavant le cas  $U = V^*$ . Soit  $\text{End}(V)$  l'espace des endomorphismes de  $V$  (ie. les applications  $K$ -linéaires de  $V$  sur  $V$ ) et soit  $\varphi \in \text{End}(V)$ . Montrer que la fonction sur  $V^* \times V$  à valeurs dans  $K$  définie par

$$B_\varphi : (\ell, v) \in V^* \times V \mapsto B_\varphi(\ell, v) = \ell(\varphi(v)) \in K$$

est une forme bilinéaire sur  $V^* \times V$ .

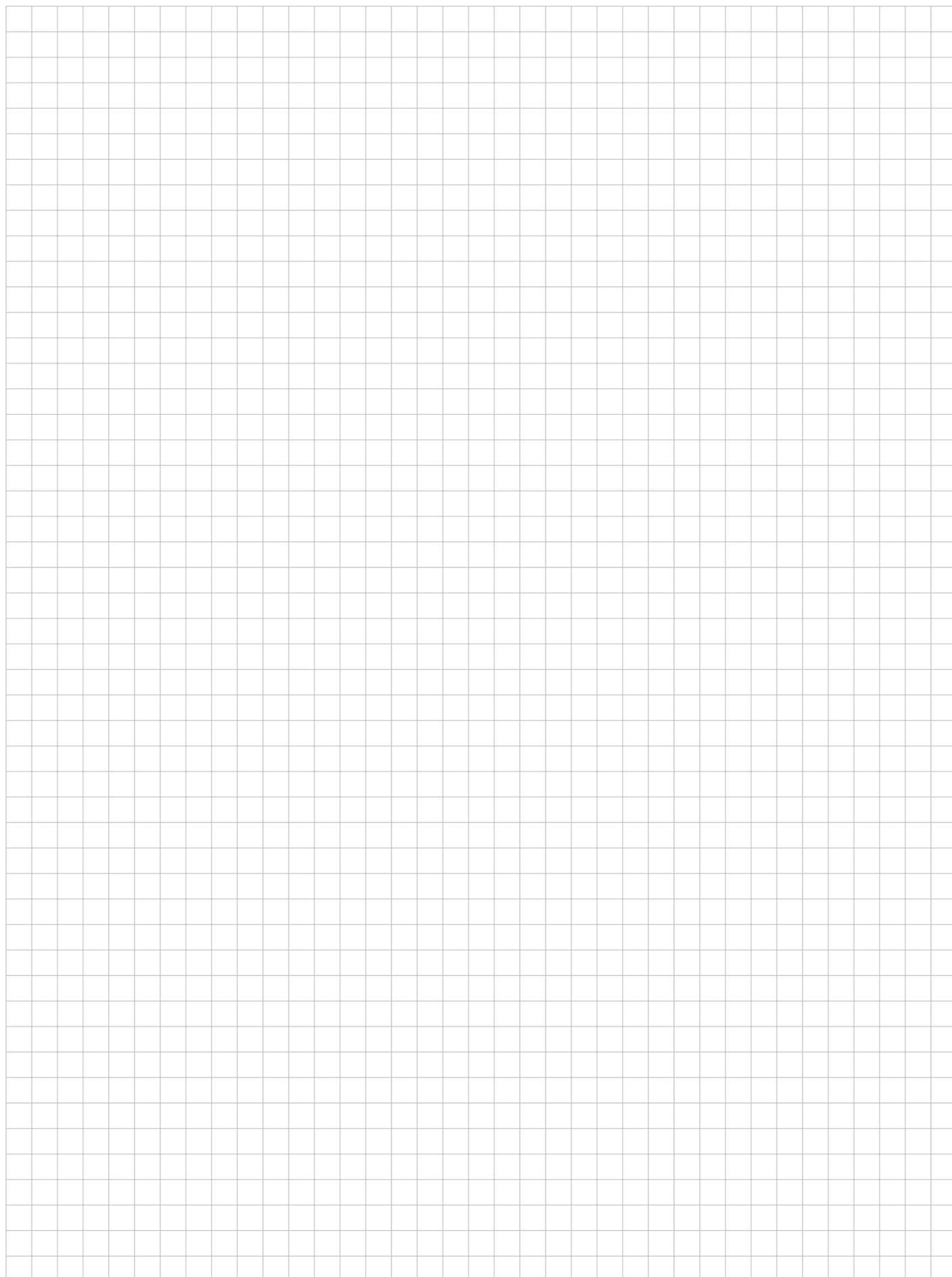
4. Montrer que l'application de  $\text{End}(V)$  à valeurs dans  $\text{Bil}(V^*, V)$  définie par

$$B_\bullet : \varphi \in \text{End}(V) \mapsto B_\varphi \in \text{Bil}(V^*, V)$$

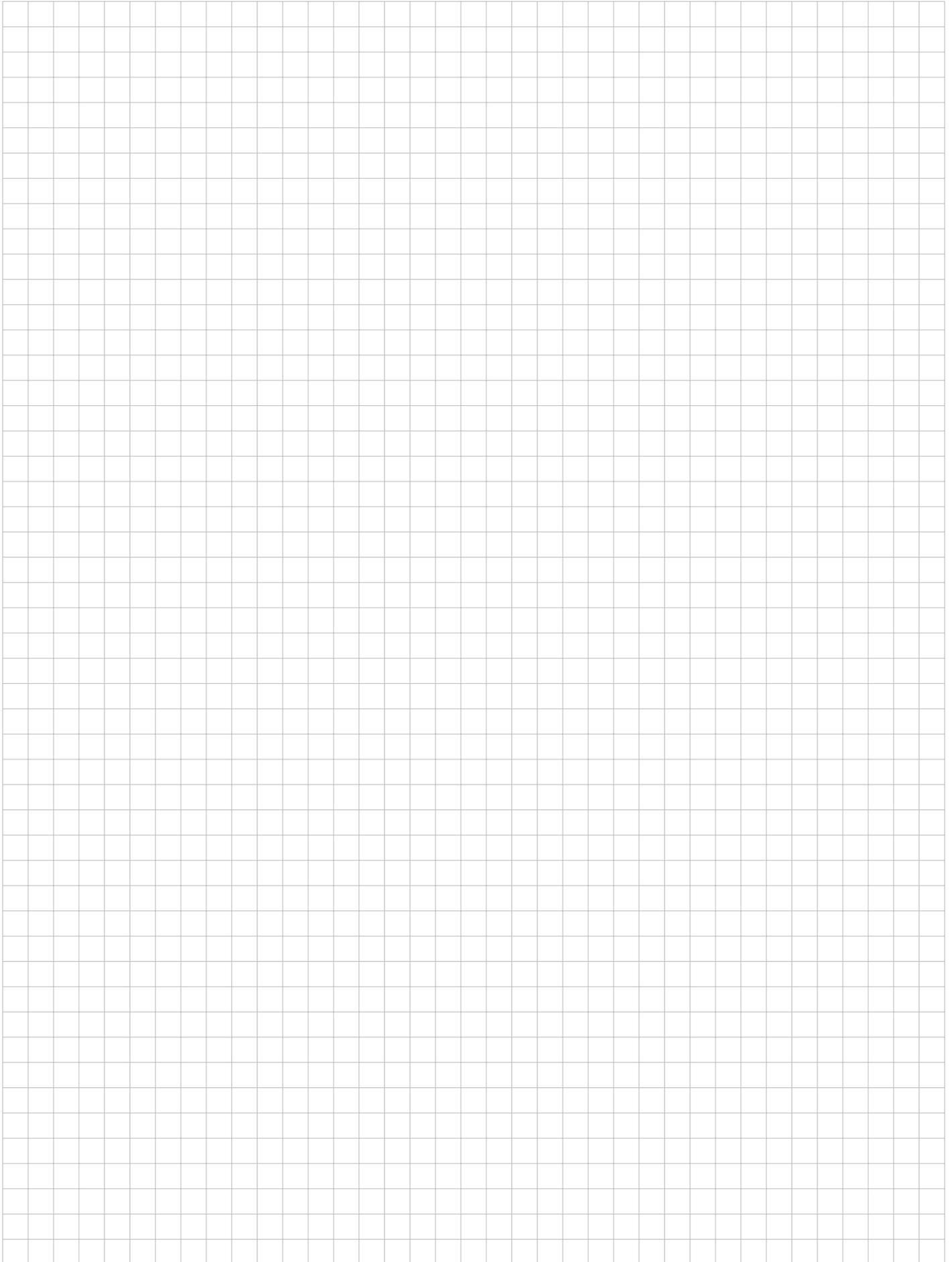
est linéaire et injective (pour ce dernier point on observera que les valeurs  $B_\varphi(\mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_j)$  sont liées à la matrice de  $\varphi$  dans une base convenable).

5. Montrer que  $\text{End}(V)$  est isomorphe à  $\text{Bil}(V^*, V)$  (comme  $K$ -espace vectoriel).

*Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 3.

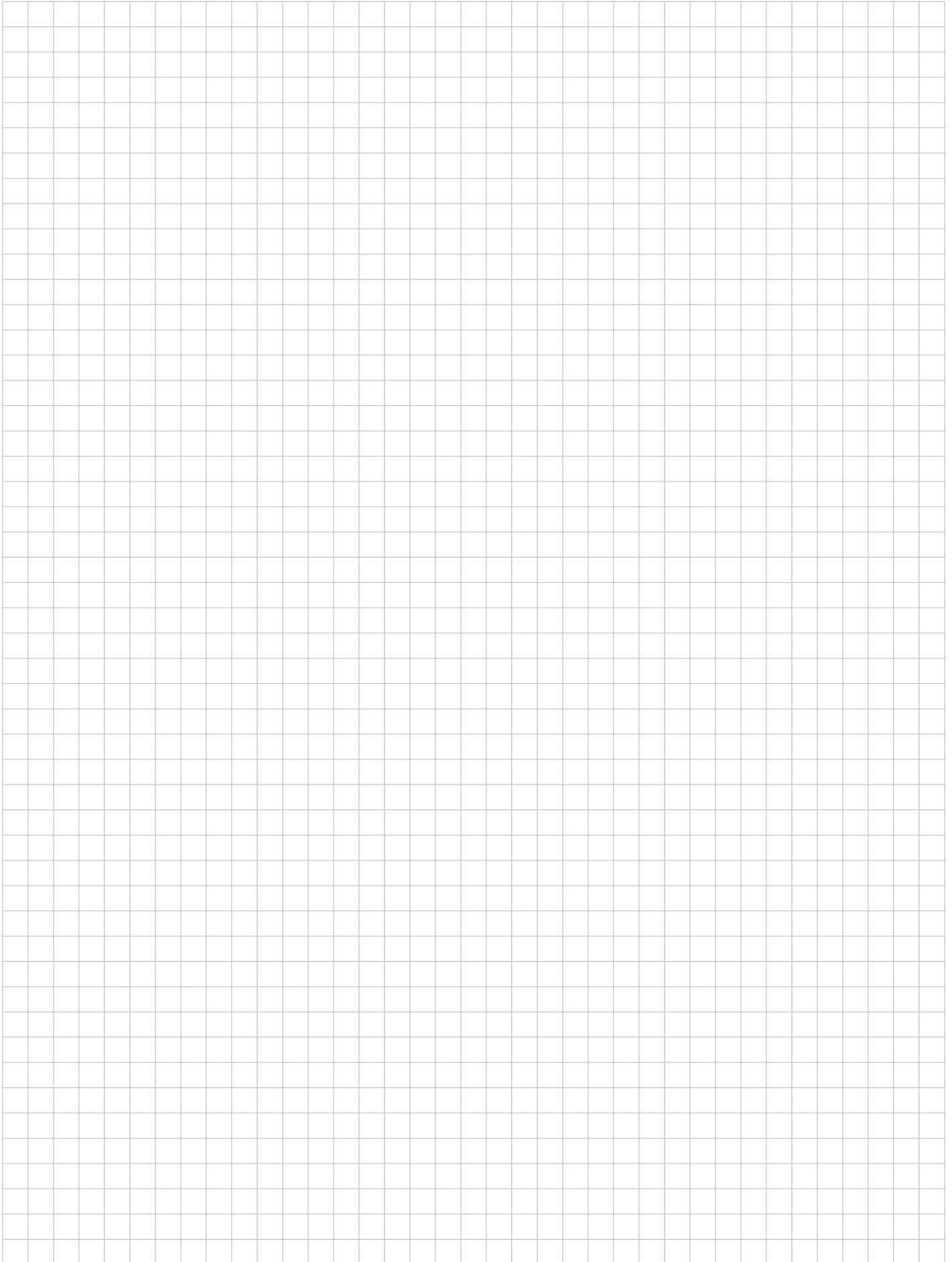
*Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 3.

*Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 3.

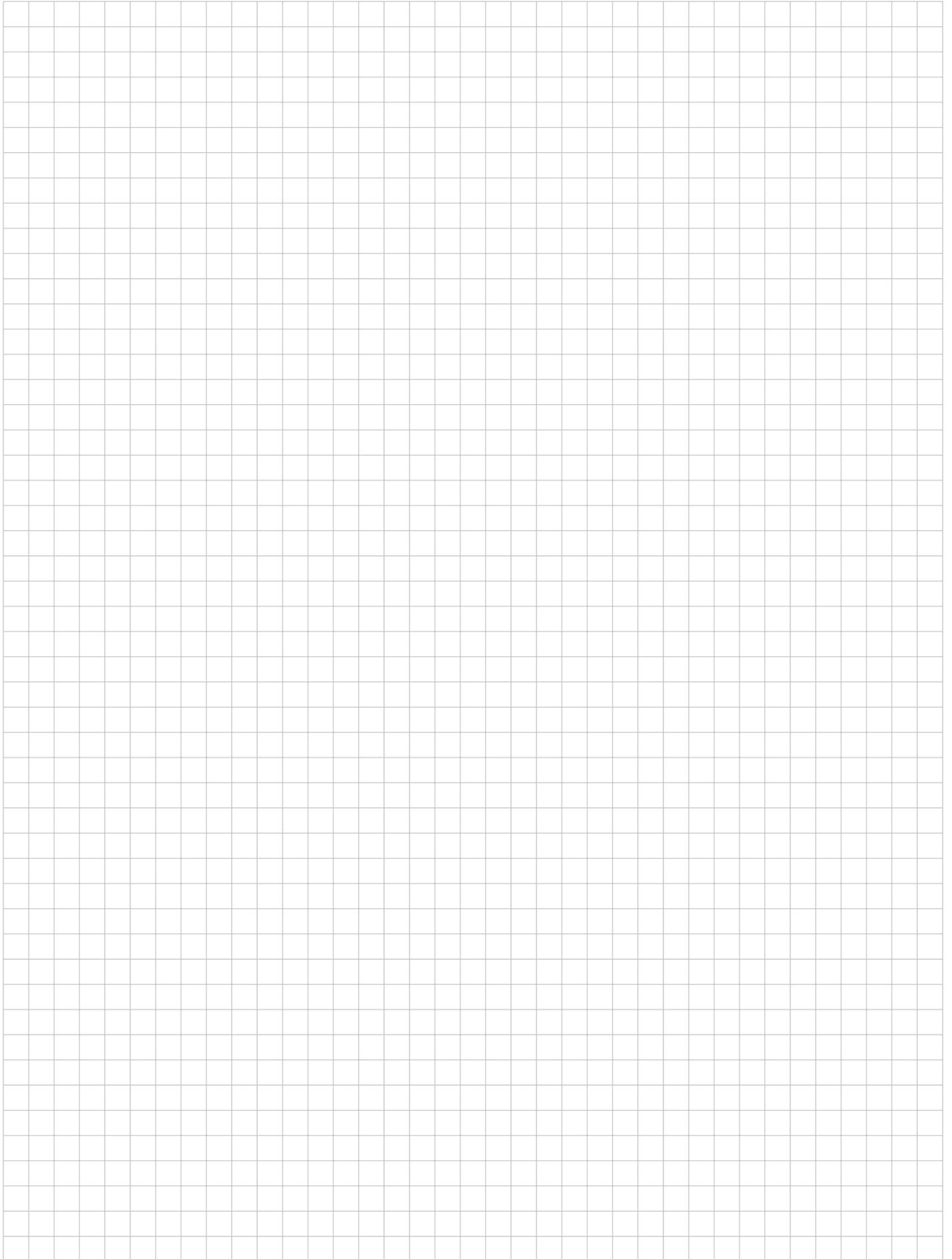
*Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 3.

*Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 3.

*Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 3.

**Exercice 4.** Soit  $K$  un corps et  $V = K^2$  le  $K$ -espace vectoriel de dimension 2. On rappelle qu'une droite (linéaire)  $D \subset V$  est un sous-espace vectoriel de dimension 1:

$$D = K.v = \{\lambda.v, \lambda \in K\}$$

où  $v \in V - \{0_V\}$  est un vecteur non-nul. On note

$$P^1(K) = \{D \subset K^2, \dim_K(D) = 1\}$$

l'ensemble des droites de  $K^2$ .

1. Montrer que  $P^1(K)$  est en bijection avec l'ensemble des vecteurs

$$\{v_\lambda := (1, \lambda), \lambda \in K\} \cup \{v_\infty := (0, 1)\} \subset V$$

2. Soit  $\varphi \in \text{GL}(V) \simeq \text{GL}_2(K)$  une application  $K$ -linéaire inversible. On suppose que pour tout  $v \in V$  il existe un scalaire  $\lambda_v \in K$  tel que

$$\varphi(v) = \lambda_v.v.$$

Montrer qu'en fait les  $\lambda_v$  sont tous égaux à un même scalaire  $\lambda \in K^\times$  de sorte que

$$\varphi = \lambda.\text{Id}_V.$$

3. Soit  $\varphi \in \text{GL}(K^2)$  une application linéaire inversible (on ne fait pas d'autre hypothèse sur  $\varphi$ ). Comme  $\varphi$  est linéaire, l'image d'une droite  $D$  par  $\varphi$

$$\varphi(D) = \{\varphi(v'), v' \in D\}$$

est encore une droite (on ne demande PAS de le démontrer). On note

$$\sigma_\varphi : D \in P^1(K) \mapsto \varphi(D) \in P^1(K)$$

l'application correspondante sur l'ensemble des droites.

- (a) Montrer que  $\sigma_\varphi$  est une bijection de l'ensemble  $P^1(K)$  sur lui-même et que l'application

$$\sigma_\bullet : \varphi \in \text{GL}(K^2) \mapsto \sigma_\varphi \in \text{Bij}(P^1(K))$$

est un morphisme de groupes.

- (b) Montrer que le noyau du morphisme ci-dessus vaut

$$\ker(\sigma_\bullet) = K^\times.\text{Id}_{K^2},$$

ie. le groupe des multiples non-nuls de l'application identité (c.a.d les homothéties linéaires de  $K^2$ ).

4. On suppose maintenant que  $K = \mathbb{F}_p$  est le corps fini à  $p$  éléments (ici  $p \geq 2$  est un nombre premier). Montrer les égalités suivantes

$$|P^1(\mathbb{F}_p)| = p + 1, \quad |\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)| = (p^2 - 1)(p^2 - p).$$

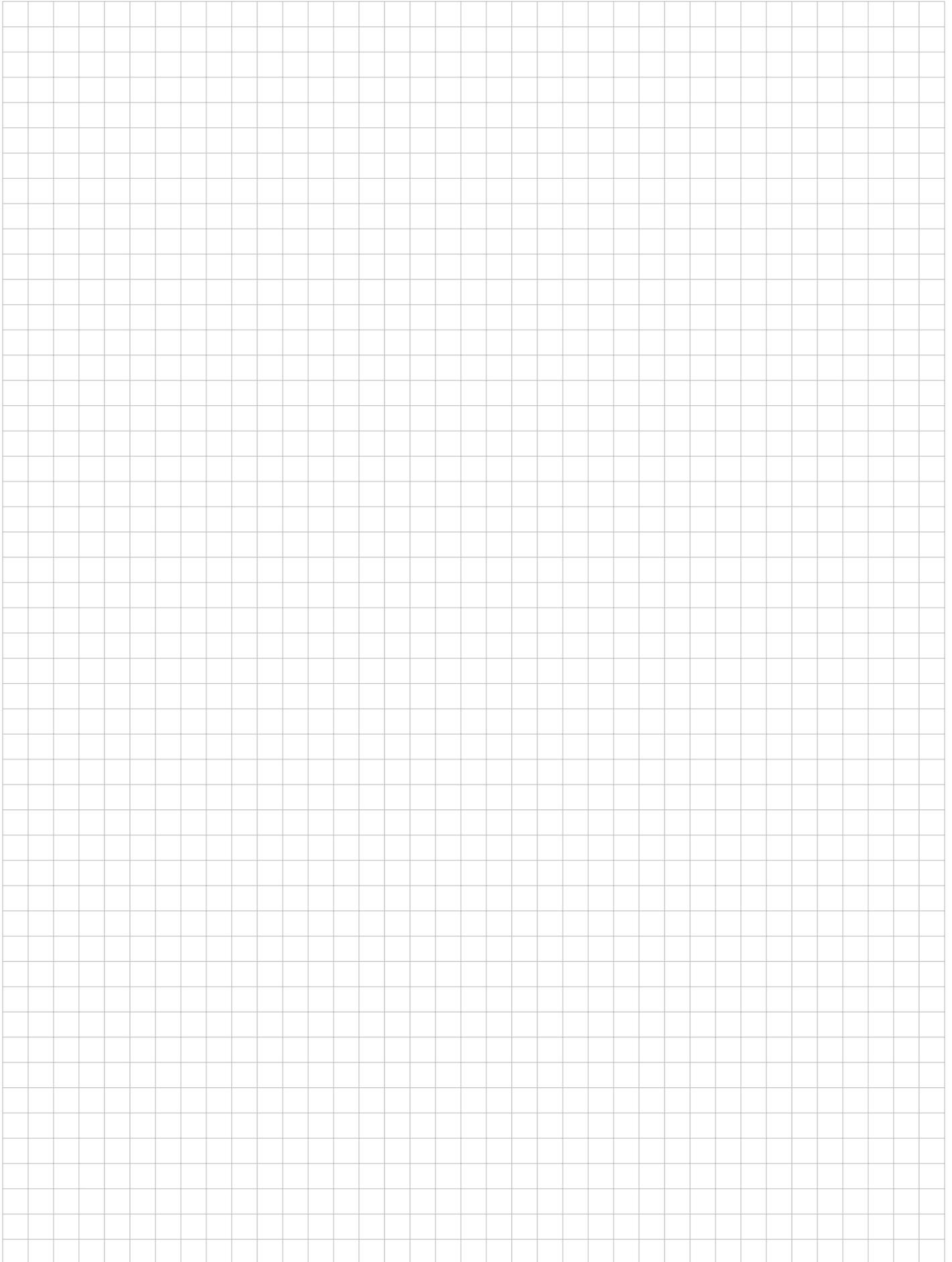
Pour la deuxième égalité on pourra (au choix) soit compter le nombre de solutions de l'équation

$$ad - bc = 0_{\mathbb{F}_p}, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{F}_p^4,$$

soit raisonner à partir des vecteurs colonnes qui composent une matrice  $2 \times 2$  inversible, soit trouver une autre méthode de comptage.

5. Montrer que pour  $p = 2$ , le groupe  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_2)$  est isomorphe au groupe  $\mathfrak{S}_3 = \text{Bij}(\{1, 2, 3\})$  (ie. le groupe des permutations d'un ensemble de 3 éléments).
6. Donner un exemple de matrice  $M_3 \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_2)$  qui correspond à un cycle de longueur 3 par un tel isomorphisme.

*Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 4.

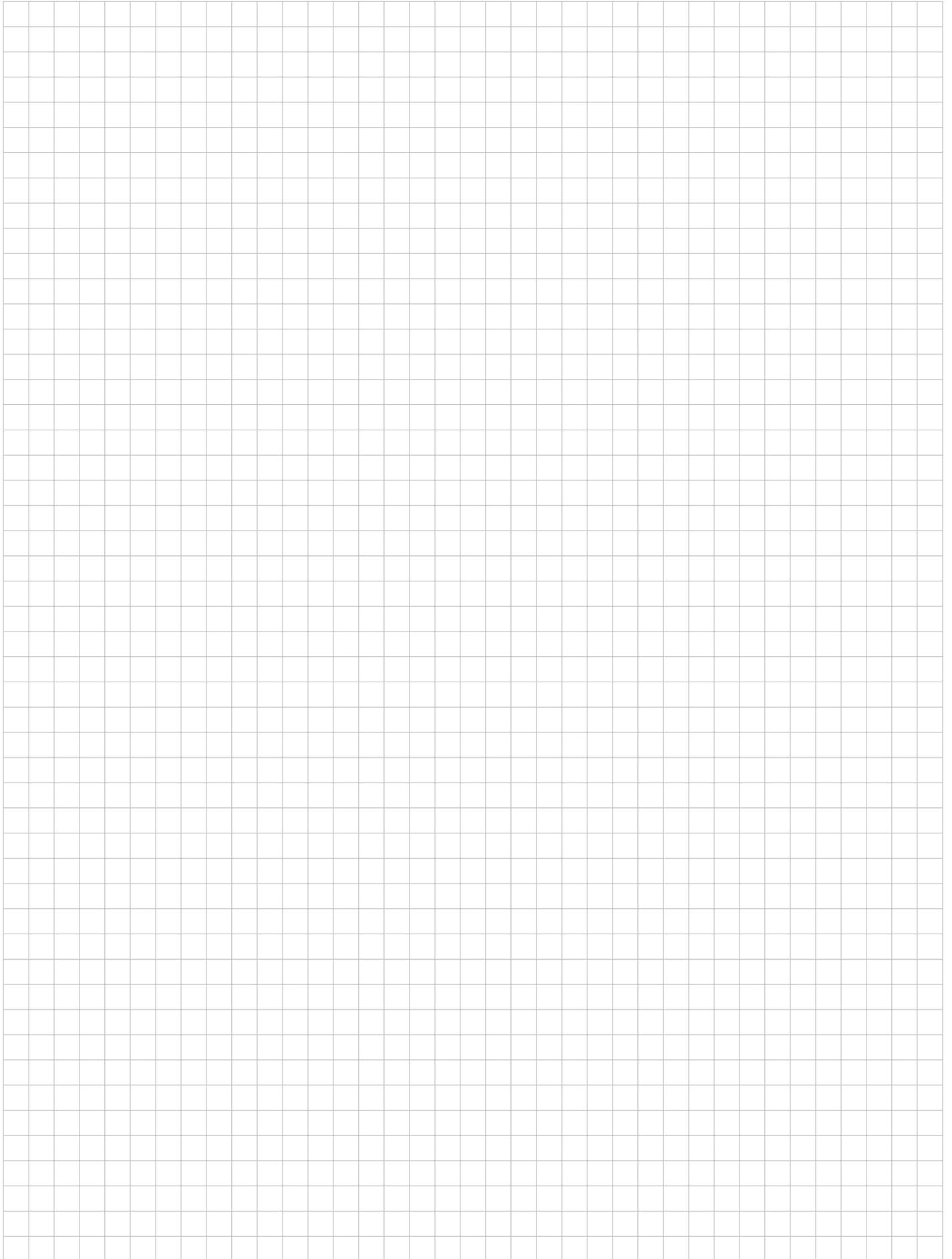
*Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 4.

*Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 4.

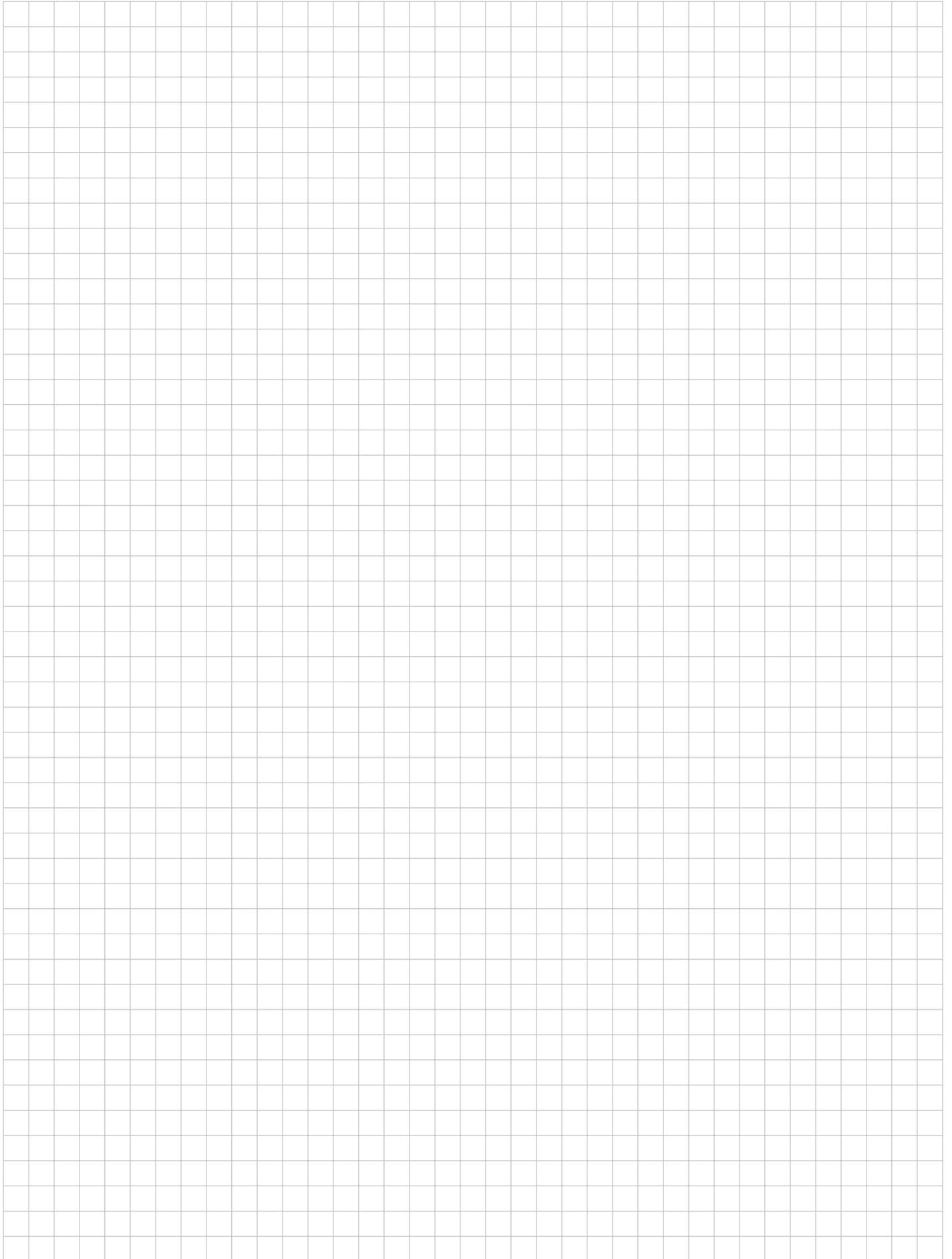
*Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 4.

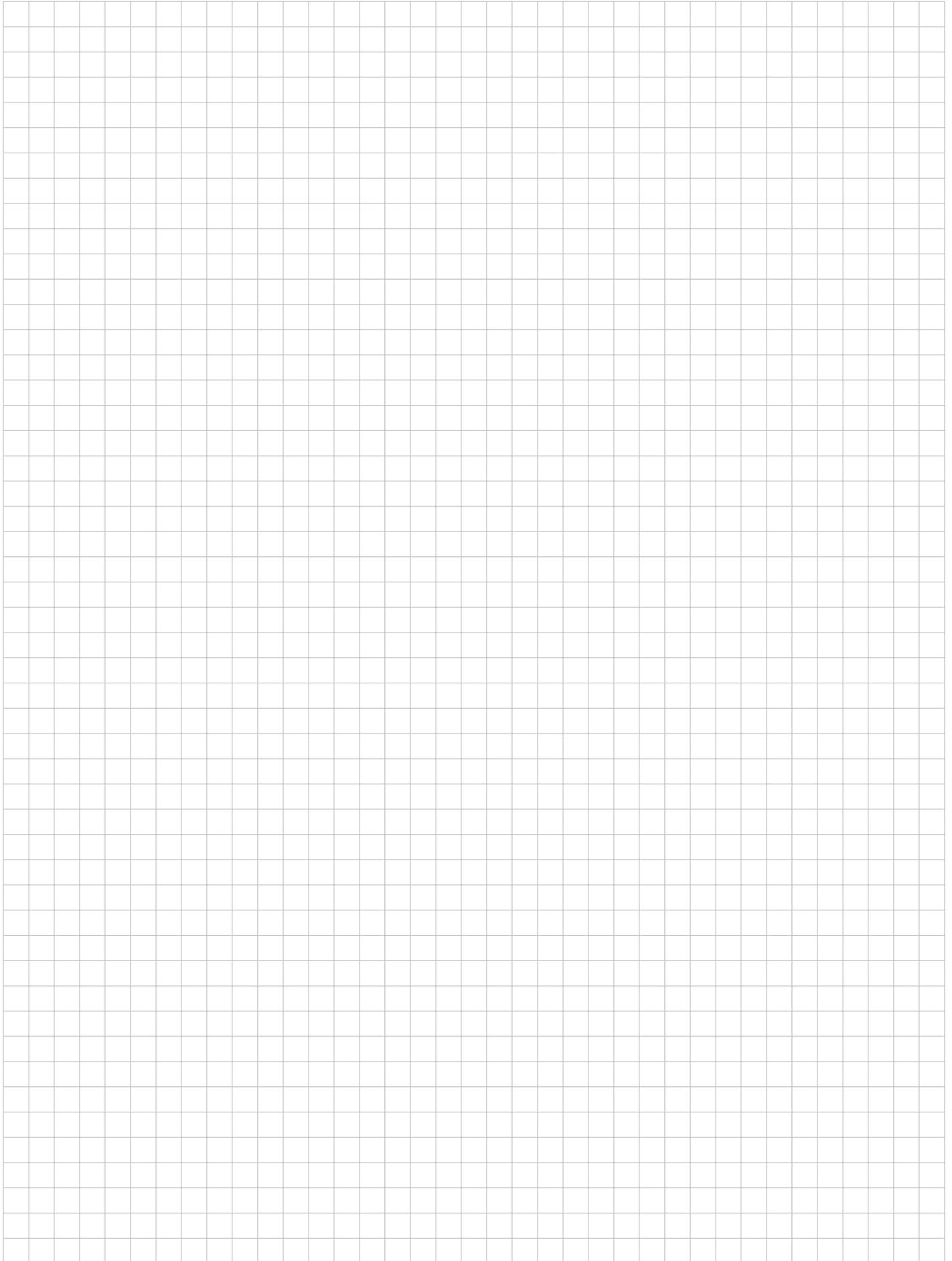
*Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 4.

*Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 4.

*Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 4.

**Exercice 5** (Le lemme de Schur). Soit  $K$  un corps et  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie (non-nulle). Soit  $G$  un groupe fini et

$$\rho : \begin{array}{l} G \mapsto \text{GL}(V) \\ g \mapsto \rho_g \end{array}$$

un morphisme du groupe  $G$  vers le groupe linéaire de  $V$ ; on notera  $\rho_g \in \text{GL}(V)$  l'image d'un élément  $g \in G$  par le morphisme  $\rho$ .

**Définition 5.1.** On appelle *endomorphisme d'entrelacement*, une application  $K$ -linéaire de  $V$  sur  $V$ ,  $\varphi \in \text{End}(V)$  qui commute avec tous les  $\rho_g$ :

$$\forall g \in G, \varphi \circ \rho_g = \rho_g \circ \varphi$$

et on note l'ensemble des endomorphismes d'entrelacement

$$\text{End}_\rho(V) := \{\varphi \in \text{End}(V), \forall g \in G, \varphi \circ \rho_g = \rho_g \circ \varphi\}.$$

Le *Lemme de Schur* qui est l'objet de cet exercice établit une propriété fondamentale de l'ensemble des endomorphismes d'entrelacement sous une hypothèse supplémentaire.

**Définition 5.2.** On dit que  $V$  est  $\rho$ -irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels de  $V$  qui sont stables par tous les  $\rho_g$  sont les sous-espaces vectoriels triviaux, c'est à dire  $\{0_V\}$  et  $V$ : si  $U \subset V$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  qui satisfait

$$\forall g \in G, \rho_g(U) \subset U$$

alors  $U = \{0_V\}$  ou  $U = V$ .

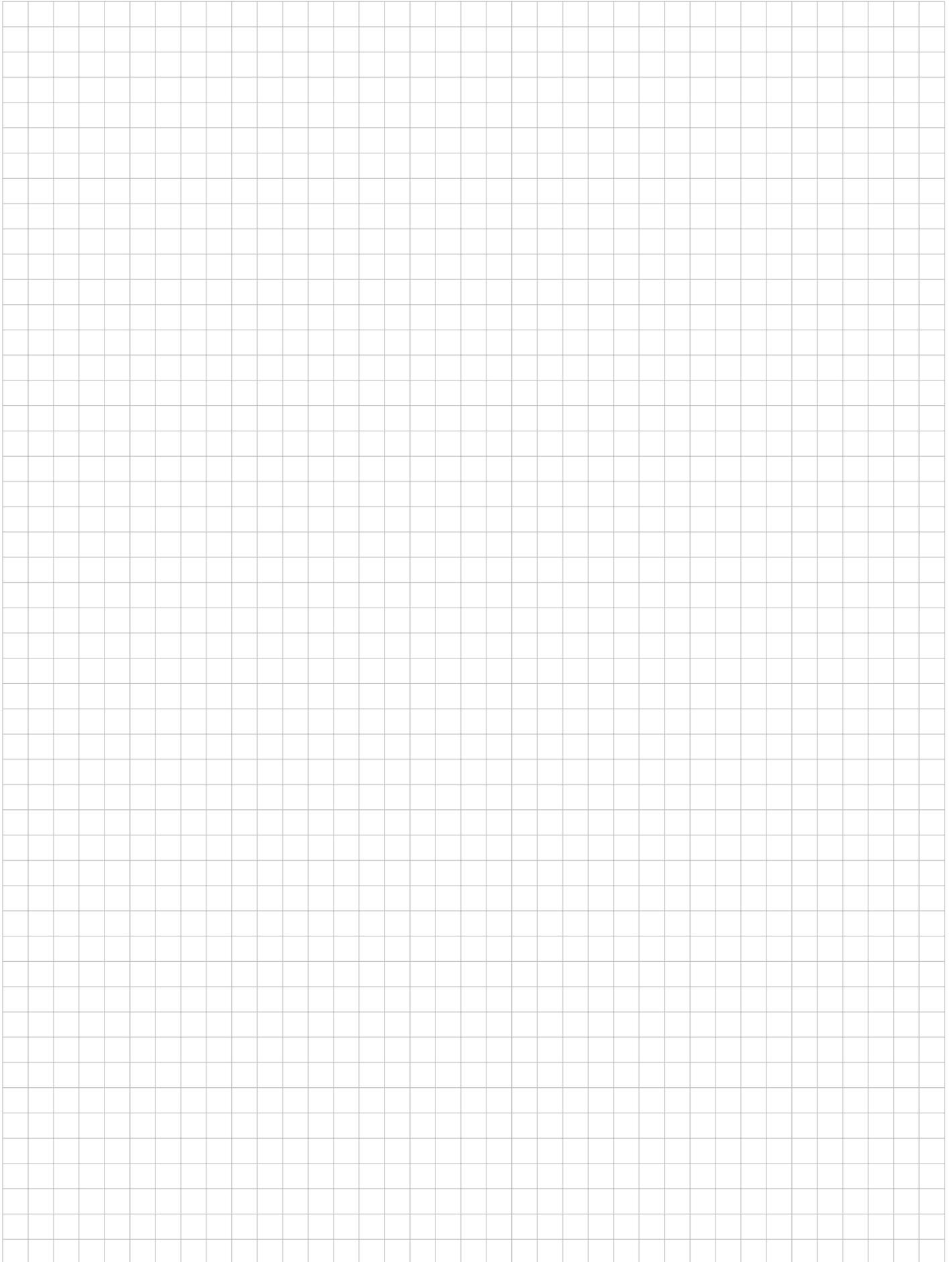
On rappelle également que le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$  est *algébriquement clos*, c'est à dire que tout polynôme unitaire de degré  $d \geq 1$ ,  $P(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_1X + a_0$  admet au moins une racine complexe: il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $P(\lambda) = 0$ .

1. Montrer que  $\text{End}_\rho(V)$  est un sous-espace vectoriel ainsi qu'un sous-anneau de la  $K$ -algèbre  $\text{End}(V)$  (pour l'addition et la composition des endomorphismes).
2. *On suppose dans la suite que  $V$  est  $\rho$ -irréductible.* Montrer que tout élément non-nul  $\varphi$  de  $\text{End}_\rho(V)$  est inversible et que son inverse  $\varphi^{-1}$  appartient à  $\text{End}_\rho(V)$ . Pour cela on considèrera (au choix) ou bien son noyau  $\ker(\varphi) \subset V$  ou bien son image  $\text{Im}(\varphi) \subset V$  (ou bien les deux).
3. *On suppose (en plus de la  $\rho$ -irréductibilité que  $K = \mathbb{C}$  est le corps des complexes.* Soit  $\varphi \in \text{End}_\rho(V)$ , montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\varphi_\lambda := \varphi - \lambda \cdot \text{Id}_V$  n'est pas inversible (pensez au polynôme caractéristique) et montrer qu'en fait

$$\varphi = \lambda \cdot \text{Id}_V.$$

4. *On suppose en plus du reste que  $G$  est un groupe commutatif.* Montrer que
  - (a) pour tout  $g \in G$ ,  $\rho_g$  appartient à  $\text{End}_\rho(V)$ ,
  - (b) on a  $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 1$ .

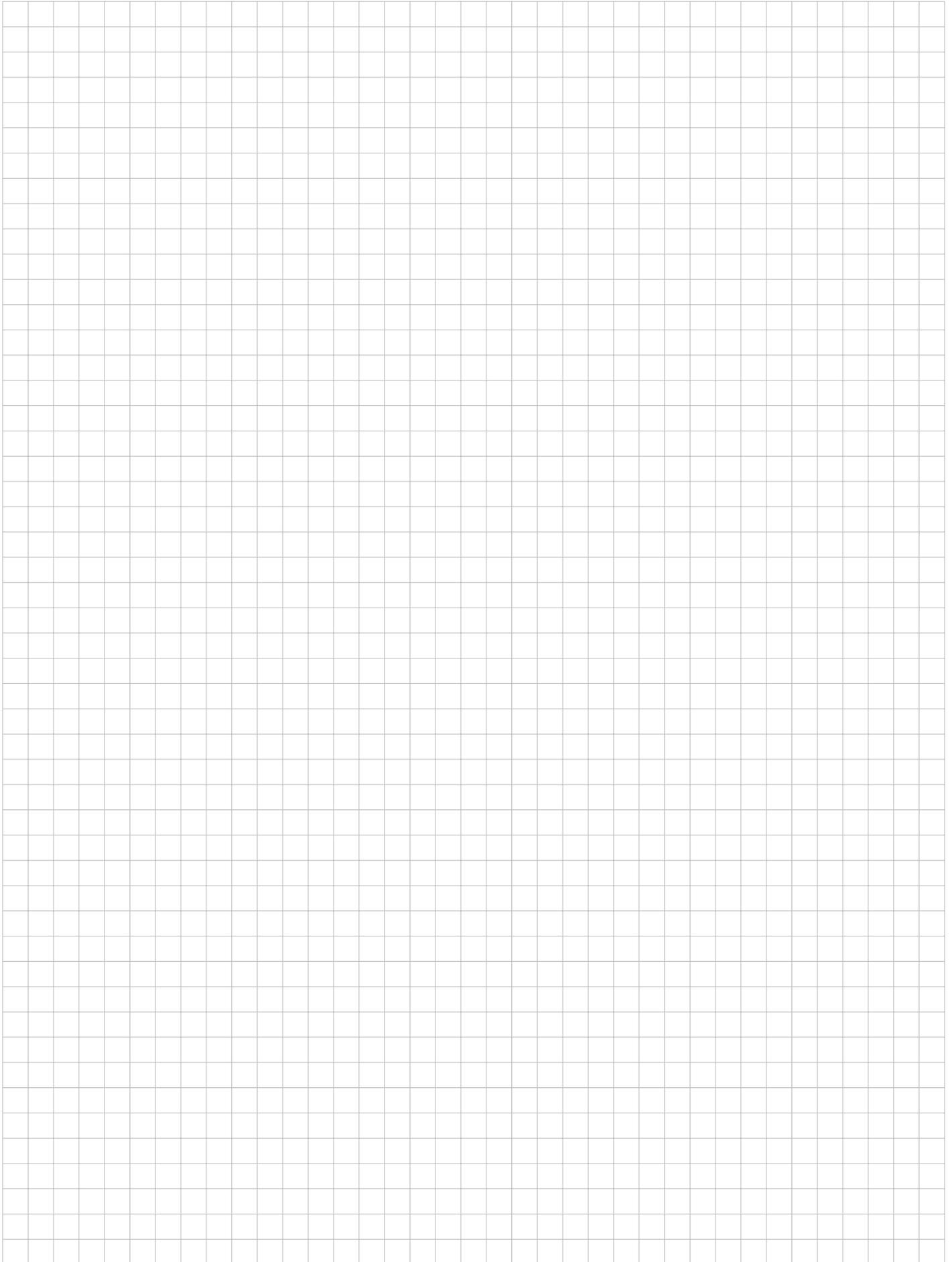
*Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 5.

*Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 5.

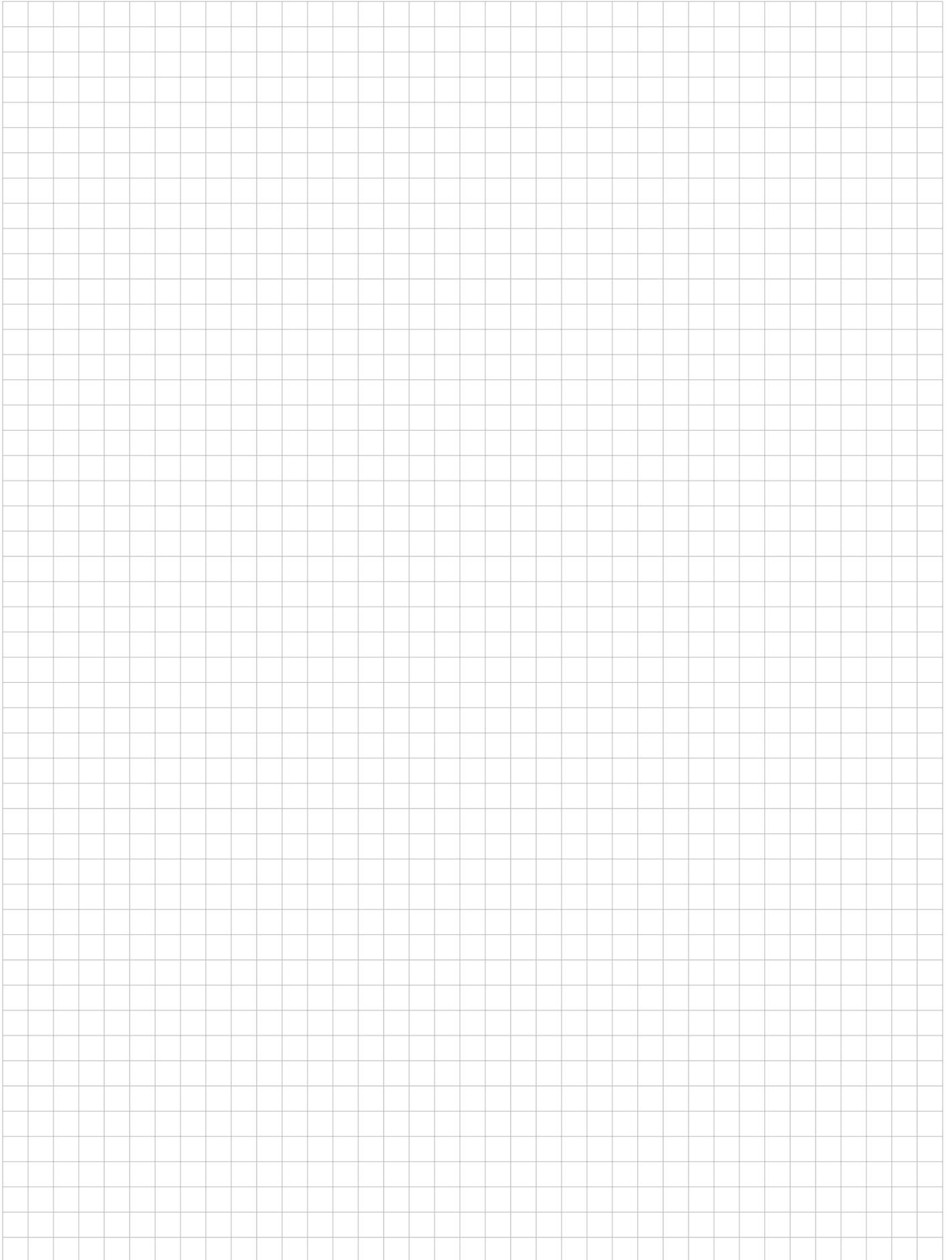
*Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 5.

*Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

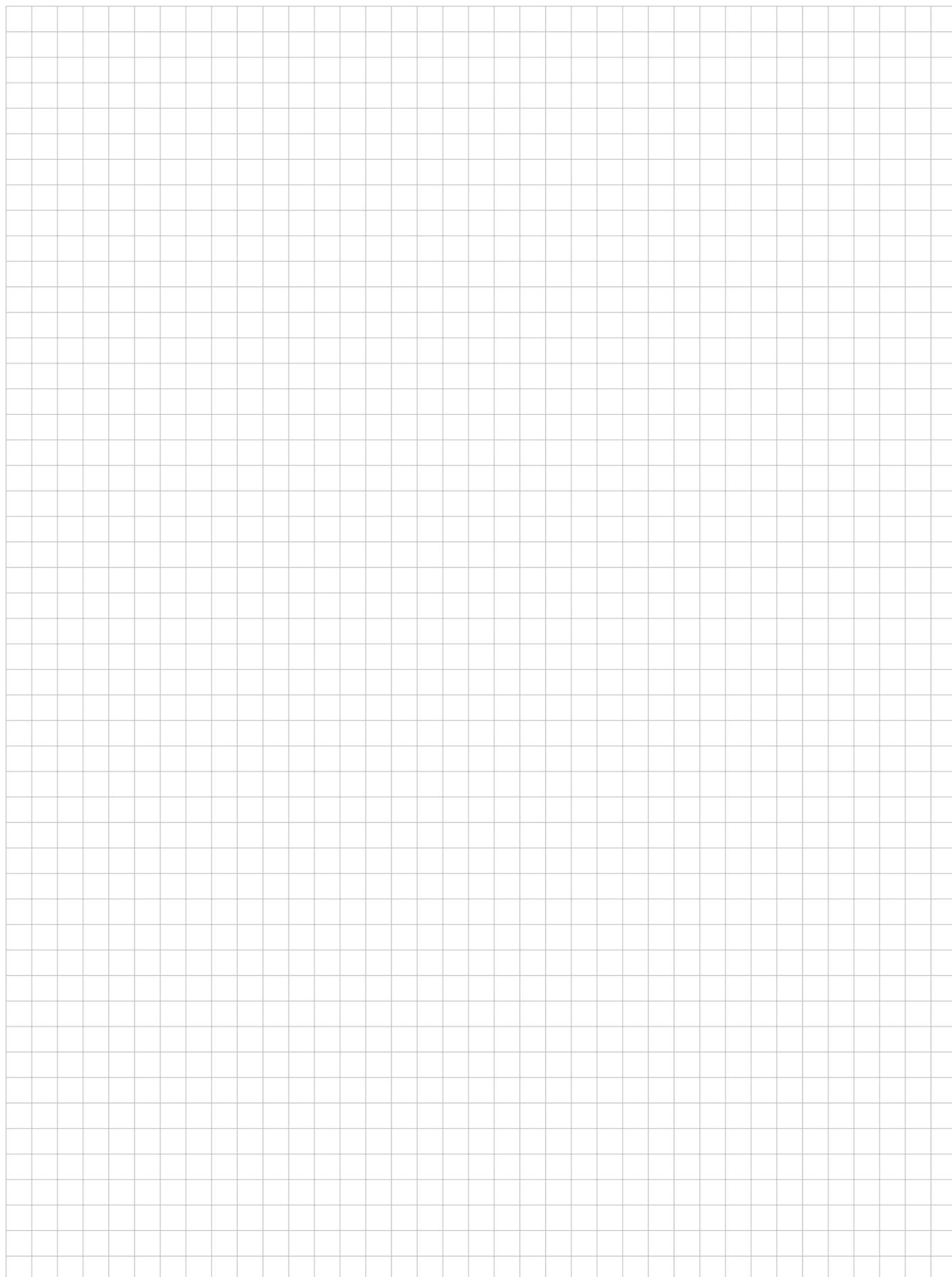
A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 5.

*Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 5.



*Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boîte)*

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for writing answers to the questions in Exercise 5.