1

**Ens. : Analyse I**
**Analyse I - MA**
**Automne 2022**
**Durée : 1 heures**

# Student One

SCIPER : **111111**

**Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.**

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  $0$ point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  $-1$ point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  $0$ point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  $-1$ point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

| choisir une réponse \| select an answer Antwort auswählen | ne PAS choisir une réponse \| NOT select an answer NICHT Antwort auswählen | Corriger une réponse \| Correct an answer Antwort korrigieren |
|---|---|---|

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

**Question 1:**

Soit la fonction $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(2\pi x) + x$. Soient $p_i(x)$, $i = 0,..,3$ les polynômes de Taylor d'ordre 1 de $f$, en $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ et $x_3 = \frac{3}{2}$, respectivement et $P(x)$ la fonction définie par morceaux :

$$P(x) = \begin{cases} p_0(x) & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[ \\ p_1(x) & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[ \\ p_2(x) & x \in \left[1, \frac{3}{2}\right[ \\ p_3(x) & x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{cases}$$

1) Donner les polynômes $p_i(x)$, $i = 0,..,3$.

2) La fonction $P$ est-elle continue sur $[0,2]$ ? Si non, trouver les points de discontinuité de $P$.

3) Démontrer que $\left|f(x) - P(x)\right| \leq \dfrac{\pi^2}{2}$ pout tout $x \in [0,2]$.

***Solution :*** *Soit la fonction $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(2\pi x) + x$. Soient $p_i(x)$, $i = 0,..,3$ les polynômes de Taylor d'ordre 1 de $f$, en $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ et $x_3 = \frac{3}{2}$, respectivement et $P(x)$ la fonction définie par morceaux :*

$$P(x) = \begin{cases} p_0(x) & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[ \\ p_1(x) & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[ \\ p_2(x) & x \in \left[1, \frac{3}{2}\right[ \\ p_3(x) & x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{cases}$$

***Rappel:*** *Pour $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en $x_i \in D$, le polynôme de Taylor d'ordre $n$ en $x_i$ est*

$$f_n(x) = \sum_{n=0}^{n} f^{(n)}(x_i)(x - x_i)^n.$$

(à distinguer de la série de Taylor $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(x_i)(x-x_i)^n$)

(a) *On donne explicitement les polynômes $p_i(x)$, $i = 0,..,3$. Le polynôme de Taylor $p_i(x)$ d'ordre 1 de $f(x) = \sin(2\pi x) + x$ en $x_i$ est*

$$\begin{aligned} p_i(x) &= \sum_{n=0}^{1} f'(x_i)(x - x_i)^1 \\ &= f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) \\ &= \sin(2\pi x_i) + x_i + (2\pi\cos(2\pi x_i) + 1)(x - x_i). \end{aligned}$$

(a) *En $x_0 = 0$:*

$$p_0(x) = \sin(0) + 0 + (2\pi\cos(0) + 1)(x - 0) = (2\pi + 1)x$$

(b) *En $x_1 = \frac{1}{2}$:*

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \sin(\pi) + \frac{1}{2} + (2\pi\cos(\pi) + 1)(x - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2} + (1 - 2\pi)(x - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

(c) *En $x_2 = 1$:*

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \sin(2\pi) + 1 + (2\pi\cos(2\pi) + 1)(x - 1) \\ &= 1 + (1 + 2\pi)(x - 1) \end{aligned}$$

(d) *En $x_3 = \frac{3}{2}$:*

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \sin(3\pi) + \frac{3}{2} + (2\pi\cos(3\pi) + 1)(x - \frac{3}{2}) \\ &= \frac{3}{2} + (1 - 2\pi)(x - \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

(b) *On remplace les polynômes du point 1 dans la définition de $P$:*

$$P(x) = \begin{cases} (2\pi+1)x & si\ x \in [0, \frac{1}{2}[ \\ \frac{1}{2} + (1-2\pi)(x-\frac{1}{2}) & si\ x \in [\frac{1}{2}, 1[ \\ 1 + (1+2\pi)(x-1) & si\ x \in [1, \frac{3}{2}[ \\ \frac{3}{2} + (1-2\pi)(x-\frac{3}{2}) & si\ x \in [\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$$

*La fonction $P$ est continue par morceaux (puisque chaque morceau est un polynôme). Il faut donc vérifier la continuité aux points $x_i$ pour $i = 1, 2, 3$.*

(a) *En $x_1 = \frac{1}{2}$:*

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} P(x) = \frac{2\pi+1}{2} \neq \frac{1}{2} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} P(x)$$

*Donc $P$ est discontinue en $x_1 = \frac{1}{2}$.*

(b) *En $x_2 = 1$:*

$$\lim_{x \to 1^-} P(x) = \frac{1}{2} + \frac{1-2\pi}{2} \neq 1 = \lim_{x \to 1^+} P(x)$$

*Donc $P$ est discontinue en $x_2 = 1$.*

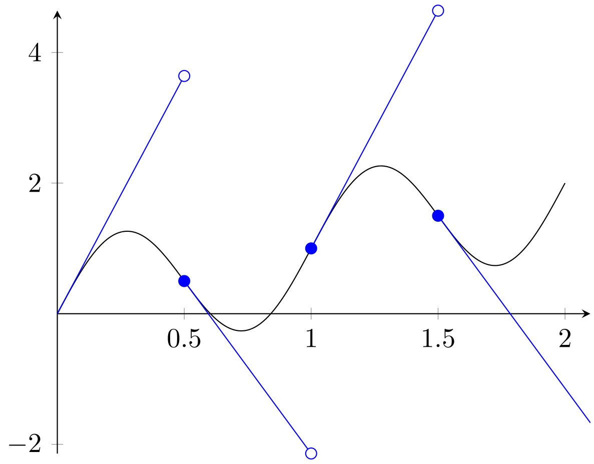
(c) *En $x_3 = \frac{3}{2}$:*

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} P(x) = 1 + \frac{2\pi+1}{2} \neq \frac{3}{2} = \lim_{x \to \frac{3}{2}^+} P(x)$$

*Donc $P$ est discontinue en $x_3 = \frac{3}{2}$.*

(Il n'est pas demandé de tracer le graphe de f dans l'énoncé)

*Le graphique ci-dessous représente $P$, en bleu, et $f$, en noir. On peut voir les 3 points de discontinuité en $x_1, x_2, x_3$.*




→(Thm. de Taylor, 2ème partie)

(c) *Démontrons que $\left|f(x) - P(x)\right| \leq \frac{\pi^2}{2}$ pout tout $x \in [0, 2]$. Par un résultat du cours, on sait que*

$$\begin{aligned} |f(x) - p_i(x)| &\leq \max_{y \in [x_i, x]} \left|\frac{f''(y)}{2}(x - x_i)^2\right| \\ &= \max_{y \in [x_i, x]} \left| - 2\pi^2 \sin(2\pi y)(x - x_i)^2\right| \\ &\leq 2\pi^2 (x - x_i)^2 \end{aligned}$$

*car $|-2\pi^2 \sin(2\pi y)|$ est borné par $2\pi^2$.*

*De plus, sur chaque morceau de $P$, on a $|x - x_i| \leq \frac{1}{2}$. On obtient donc bien*

$$|f(x) - P(x)| \leq 2\pi^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}.$$

**Question 2:**

(a) Calculer le développement limité d'ordre 2 de $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ autour de $x_0 = 1$.

(b) Déterminer si la série

$$\sum_{n\geq 1} \left\{ \arctan\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n} \right\}$$

converge ou diverge, en justifiant rigoureusement votre réponse.

***Solution :***

*(a) Calculons le développement limité d'ordre 2 de $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ autour de $x_0 = 1$. Calculons d'abord ses dérivées première et deuxième:*

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$$
$$f''(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Détail : $\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$ donc $f'(x) = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{-1}{1+x^2}$

*Rappelons que le développement limité d'ordre 2 de $f$ en $x_0$ est*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Par ailleurs, *on peut écrire*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R(x),$$

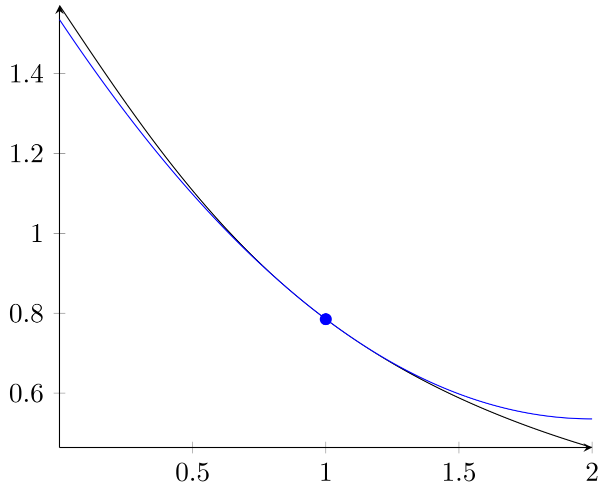
*où $R$ est une fonction définie dans un voisinage de $x_0 = 1$ et il existe deux constantes $\delta > 0$ et $C > 0$ telles que $R(x) \leq C(x-x_0)^2$ pour tout $x$ tel que $|x - x_0| < \delta$ (on utilisera cela au point 2).*

*Calculons ce développement limité pour $f(x) = \arctan(\frac{1}{x})$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + R(x) \\ &= \arctan(1) - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + R(x) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + R(x), \end{aligned}$$

*où $R(x) =$* $(x-1)^2 \varepsilon(x)$ où $\lim_{x\to 1} \varepsilon(x) = 0$

*Dans le graphique ci-dessous, on peut voir $f$ en noir et le polynôme de Taylor de degré 2 en 1,* $\arctan(1) - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2$, *en bleu.*




*(b) Pour déterminer si la série*

$$\sum_{n\geq 1}\left\{\arctan\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2n}\right\}$$

*converge ou diverge, on va calculer* $\arctan(\frac{1}{1+\frac{1}{n}})$ *et observer son comportement quand* $n \to \infty$. *Remplaçons* $x$ *par* $1+\frac{1}{n}$ *au point 1.*

$$\arctan(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n} \qquad + \frac{1}{4n^2} + R(1+\frac{1}{n}).$$

*Ecrivons donc le terme de la somme comme*

$$\arctan(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n}$$
$$= \frac{1}{4n^2} + R(1+\frac{1}{n}).$$

*Par le point 1, il existe* $\delta > 0$ *et* $C > 0$ *tels que* $R(x) \leq C(x-1)^2$ *pour tout* $x$ *tel que* $|x - x_0| < \delta$. *Ainsi, si* $n \geq \frac{1}{\delta}$, $|1+\frac{1}{n}-1| \leq \delta$, *et donc* $R(1+\frac{1}{n}) \leq C\frac{1}{n^2}$. *Le terme de la somme est donc borné quand* $n \geq \frac{1}{\delta}$*:*

$$\arctan(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{4n^2} + C\frac{1}{n^2} = C'\frac{1}{n^2}.$$

*Comme la série* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ *converge, par le critère de comparaison, on déduit que*

$$\sum_{n\geq 1}\arctan(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n}$$

*converge aussi.*

**Question 3:**

Calculer l'intégrale $\int_{1/8}^{1/3} \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variables $u = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$.

***Solution :***

*Les nouvelles bornes sont*

$$u_1 = \sqrt{\frac{1/8+1}{1/8}} = \sqrt{1+8} = 3 \qquad \textit{pour } x_1 = \frac{1}{8}$$
$$u_2 = \sqrt{\frac{1/3+1}{1/3}} = \sqrt{1+3} = 2 \qquad \textit{pour } x_2 = \frac{1}{3}.$$

*On donne trois approches de résolution. La première calcule $dx$ en fonction de $du$, la deuxième $du$ en fonction de $dx$ et la troisième exprime $\frac{1}{x^2}dx$ en fonction de $du$.*

(a) *On commence par isoler $x$ en fonction de $u$:*

$$\begin{aligned}
& u = \sqrt{\frac{x+1}{x}} \\
& \Leftrightarrow u^2 = |\frac{x+1}{x}| \\
& \Leftrightarrow u^2 = \frac{x+1}{x} \qquad (\ \textit{car } x > 0) \\
& \Leftrightarrow xu^2 = x+1 \\
& \Leftrightarrow x(u^2-1) = 1 \\
& \Leftrightarrow x = \frac{1}{u^2-1}.
\end{aligned}$$

*On calcule la dérivée puis $dx$ en fonction de $du$*

$$\frac{dx}{du} = \frac{-1}{(u^2-1)^2}2u \quad \Rightarrow dx = \frac{-2u}{(u^2-1)^2}du.$$

*On peut maintenant réécrire l'intégrale*

$$\begin{aligned}
I &= \int_{1/8}^{1/3} \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \int_3^2 \sqrt{\frac{\frac{1}{u^2-1}+1}{\frac{1}{u^2-1}}} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{u^2-1})^2} \cdot \frac{-2u}{(u^2-1)^2}du \\
&= \int_3^2 \sqrt{\frac{1+u^2-1}{1}} \cdot (u^2-1)^2 \cdot \frac{-2u}{(u^2-1)^2}du \\
&= \int_3^2 u \cdot (-2u)\,du \\
&= 2\int_2^3 u^2\,du \\
&= \frac{2}{3}\Big[u^3\Big]_2^3 \\
&= \frac{2}{3}(27-8) \\
&= \frac{2}{3}\,19\,.
\end{aligned}$$

(b) *On commence par calculer le nouvel élément infinitésimal du et exprimer du en fonction de dx.*

$$u = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$
$$\Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \frac{x-(x+1)}{x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \frac{(-1)}{x^2}$$

*On peut donc écrire du en fonction de dx:*

$$du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x+1}{x}}}dx.$$

*On peut maintenant réécrire l'intégrale*

$$I = \int_{1/8}^{1/3} \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\frac{1}{x^2}\,dx = \int_3^2 u \cdot (-2u)\,du = \int_2^3 2u^2\,du = \left[\frac{2}{3}u^3\right]_2^3$$
$$= \frac{2}{3}(27-8) = \frac{2}{3}\,19\,.$$

(c) *On commence par calculer le nouvel élément infinitésimal du et exprimer* $\frac{1}{x^2}dx$ *en fonction de du.*

$$u = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$
$$\Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \frac{x-(x+1)}{x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \frac{(-1)}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{(-1)}{x^2}$$

*On peut donc écrire* $\frac{1}{x^2}dx$ *en fonction de du:*

$$\frac{1}{x^2}dx = (-2u)du.$$

*On peut maintenant réécrire l'intégrale*

$$I = \int_{1/8}^{1/3} \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\frac{1}{x^2}\,dx = \int_3^2 u \cdot (-2u)\,du = \int_2^3 2u^2\,du = \frac{2}{3}\left[u^3\right]_2^3$$
$$= \frac{2}{3}(27-8) = \frac{2}{3}\,19\,.$$