

Analyse I – Série 13

Echauffement. (Formules d'intégration)

- a) Retrouver la formule du changement de variable à partir de la dérivée dérivée d'une composition de fonctions.
- b) Retrouver la formule d'intégration par parties à partir de la dérivée d'un produit de fonctions.

Exercice 1. (Intégration par parties)

Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int x^2 \cos(x) dx \qquad \text{b) } (*) \int e^{ax} \cos(bx) dx \quad (a \neq 0)$$

Indication : la question b) est plus difficile. En appelant $I_{a,b}$ l'intégrale en question, on cherchera à trouver une équation satisfaite par $I_{a,b}$ en intégrant deux fois par parties (ce qui fera re-apparaître $I_{a,b}$).

Exercice 2. (Intégrales récurrentes)

Trouver une formule de récurrence pour les intégrales suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

$$\text{a) } I_n(x) = \int x^n \sin(2x) dx \qquad \text{b) } I_n(x) = \int \text{Log}(x)^n dx$$

Exercice 3. (Changement de variable)

Trouver des primitives pour les fonctions f données ci-dessous en utilisant le changement de variable $x = \varphi(u)$ indiqué :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x = \sin(u) \\ \text{b) } f(x) = \frac{1}{1+x^2}, & x = \text{tg}(u) \\ \text{c) } f(x) = \frac{1}{e^x+1}, & x = \text{Log}(t) \\ \text{d) } f(x) = x\sqrt{x-1}, & x = t^2+1 \end{array}$$

Exercice 4. (Changement de variable)

Calculer les intégrales définies suivantes :

$$\text{a) } \int_0^{\pi/2} \sin(x)^5 dx \qquad \text{b) } \int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx \qquad \text{c) } \int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x}) dx$$

Indication : pour a), on peut utiliser $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ puis le changement de variable $t = \varphi(x) = \cos(x)$. Pour b) on peut poser $x = \varphi(u) = u^2 - 1$. Pour c) on peut poser $x = \varphi(u) = u^2$.

Exercice 5. (Intégrale définie)

Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33})) \cos(x^{33}) x^{32} dx .$$

Exercice 6. (Intégration de développements limités)

Calculer le développement limité d'ordre 7 autour de 0 de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

a) $f(x) = \int_0^x \text{Log}(1+t^2) dt$

b) $f(x) = \int_0^{x^2} e^{\sin(t)} dt$

Exercice 7. (Fonctions rationnelles)

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\int \frac{x-2}{x(x+1)^2} dx$

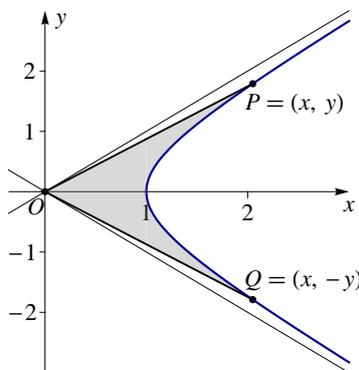
b) $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx$

c) $\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2} dx$

d) $\int \frac{4x}{x^4-1} dx$

Exercice 8.(*) (Fonctions hyperboliques)

Soient $P = (x, y)$ et $Q = (x, -y)$ des points de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ ($x \geq 1$) et t l'aire de la région comprise entre l'hyperbole et les rayons OP et OQ (aire grise sur la figure ci-contre). Montrer que $x = \text{ch}(t)$ et $y = \text{sh}(t)$.



Exercice 9. (V/F : Intégration)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non-vidé et borné et soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) f admet une primitive sur I .

V F

Dans la suite on restreint le domaine de f à l'intervalle $[a, b] \subset I$ où $a, b \in I$ tels que $a < b$.

b) Si $\int_a^b f(x) dx = 0$, alors f admet un zéro en $[a, b]$.

c) Si $\int_a^b f(x) dx \geq 0$, alors $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

d) Si $f(x) < 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx < 0$.

Soit encore F une primitive de f sur $[a, b]$.

e) Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $F(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

f) Pour tout $x \in [a, b]$, on a $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.