EPFL Lénaïc Chizat

Sections MX-SC-CGC 19 décembre 2022

Analyse I – Série 13

Echauffement. (Formules d'intégration)

a) Retrouver la formule du changement de variable à partir de la dérivée dérivée d'une composition de fonctions.
b) Retrouver la formule d'intégration par parties à partir de la dérivée d'un produit de fonctions.

Sol.:

a) La formule pour la dérivée de la fonction composée $g \circ f$ est

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x).$$

En prenant l'intégrale des deux côtés on obtient

$$\int (g \circ f)'(x)\,dx = \int g'\big(f(x)\big)f'(x)\,dx.$$

Comme $g \circ f$ est une primitive de $(g \circ f)'$, on a

$$(g \circ f)(x) + C = \int g'\big(f(x)\big)f'(x)\,dx.$$

Puisque la notation de l'intégrale indéfinie vue au cours désigne l'ensemble de toutes les primitives d'une fonction, la constante C peut être absorbée dans la notation de l'intégrale indéfinie à droite, d'où la formule voulue

$$g\big(f(x)\big) = \int g'\big(f(x)\big)f'(x)\,dx.$$

b) La dérivée du produit des fonctions f et g s'écrit

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

En prenant l'intégrale des deux côtés on obtient

$$\int \big(f(x)g(x)\big)'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Le côté gauche vaut $f(x)g(x) + C$ si bien qu'on trouve la formule d'intégration par parties en absorbant de nouveau la constante dans une des deux autres intégrales indéfinies :

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Exercice 1. (Intégration par parties)

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int x^2 \cos(x)\, dx$ b) $(*) \displaystyle\int e^{ax} \cos(bx)\, dx \qquad (a \neq 0)$

Indication : la question b) est plus difficile. En appelant $I_{a,b}$ l'intégrale en question, on cherchera à trouver une équation satisfaite par $I_{a,b}$ en intégrant deux fois par parties (ce qui fera re-apparaître $I_{a,b}$).

Sol.:

a) Par intégration par parties d'abord avec $f'(x) = \cos(x)$ [$\Rightarrow f(x) = \sin(x)$], $g(x) = x^2$ [$\Rightarrow g'(x) = 2x$] et puis avec $f'(x) = \sin(x)$ [$\Rightarrow f(x) = -\cos(x)$], $g(x) = x$ [$\Rightarrow g'(x) = 1$], il vient

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(x)\, dx &= \sin(x)\, x^2 - 2\int \sin(x)\, x\, dx = \sin(x)\, x^2 - 2\left(-\cos(x)\, x + \int \cos(x)\, dx\right)\\ &= \left(x^2 - 2\right)\sin(x) + 2x\cos(x) + C\end{aligned}$$

b) Posons $I_{a,b} = \displaystyle\int e^{ax} \cos(bx)\, dx$ et intégrons deux fois par parties avec $f'(x) = e^{ax}$ [$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{a}\, e^{ax}$] ainsi que $g(x) = \cos(bx)$ [$\Rightarrow g'(x) = -b\sin(bx)$] :

$$I_{a,b} = \frac{1}{a}\, e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)\, dx$$

Cette dernière intégrale doit aussi être intégrée par parties avec $f(x) = e^{ax}$ et $g(x) = \sin(bx)$ [$\Rightarrow g'(x) = b\cos(bx)$]

$$\int e^{ax}\sin(bx)\, dx = \frac{1}{a}\, e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\, dx$$

On remarque alors que l'intégrale à droite est $I_{a,b}$. Ainsi on peut combiner les deux équations précédentes et isoler $I_{a,b}$. On obtient

$$\begin{aligned}I_{a,b} &= \frac{1}{a}\, e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}\, e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\, I_{a,b}\right)\\ &\Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) I_{a,b} = \frac{e^{ax}}{a}\left(\cos(bx) + \frac{b}{a}\sin(bx)\right)\end{aligned}$$

et donc

$$I_{a,b} = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\Big(a\cos(bx) + b\sin(bx)\Big) + C, \quad \text{oî } c \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

Exercice 2. (Intégrales récurrentes)

Trouver une formule de récurrence pour les intégrales suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

a) $I_n(x) = \displaystyle\int x^n \sin(2x)\, dx$ b) $I_n(x) = \displaystyle\int \mathrm{Log}(x)^n\, dx$

Sol.:

1. *On a $I_0 = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$, et*

$$I_1 = -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C \quad \text{(par parties avec } f'(x) = \sin(2x) \text{ et } g(x) = x\text{)}$$

et si $n \geq 2$ (encore deux fois par parties),

$$\begin{aligned} I_n = \int x^n \sin(2x)\, dx &\overset{(1)}{=} -\frac{1}{2}x^n \cos(2x) + \frac{1}{2}n \int x^{n-1} \cos(2x)\, dx \\ &\overset{(2)}{=} -\frac{1}{2}x^n \cos(2x) + \frac{n}{2}\left[\frac{1}{2}x^{n-1}\sin(2x) - \frac{1}{2}(n-1)\int x^{n-2}\sin(2x)\, dx\right] \\ &= \frac{x^{n-1}}{4}\left(n\sin(2x) - 2x\cos(2x)\right) - \frac{n(n-1)}{4} I_{n-2}, \end{aligned}$$

où (1): $f'(x) = \sin(2x)$ *et* $g(x) = x^n$ *et* (2): $f'(x) = \cos(2x)$ *et* $g(x) = x^{n-1}$.

2. *Posons* $I_n = \int \mathrm{Log}(x)^n\, dx$. *Alors* $I_0 = x + C$. *Pour* $n \geq 1$ *on intègre par parties avec* $f'(x) = 1$ *et* $g(x) = \mathrm{Log}(x)^n$ *:*

$$I_n = \int 1 \cdot \mathrm{Log}(x)^n\, dx = x\,\mathrm{Log}(x)^n - n\int x\,\mathrm{Log}(x)^{n-1}\frac{1}{x}\, dx = x\,\mathrm{Log}(x)^n - nI_{n-1}.$$

Exercice 3. (Changement de variable)

Trouver des primitives pour les fonctions f données ci-dessous en utilisant le changement de variable $x = \varphi(u)$ indiqué :

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad x = \sin(u)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad x = \mathrm{tg}(u)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$, $\quad x = \mathrm{Log}(t)$

d) $f(x) = x\sqrt{x-1}$, $\quad x = t^2 + 1$

Sol.: *La formule pour le changement de variable* $x = \varphi(u)$ *est* $\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\, du$.

a) Pour $x = \varphi(u) = \sin(u)$ *on a* $f(\varphi(u)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin(u)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\cos(u)^2}} = \dfrac{1}{\cos(u)}$ *et* $\varphi'(u) = \cos(u)$. *Ainsi*

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{\cos(u)}{\cos(u)}\, du = \int du = u + C = \mathrm{Arcsin}(x) + C\,,$$

où on a utilisé que $u = \varphi^{-1}(x) = \mathrm{Arcsin}(x)$.

b) Pour $x = \varphi(u) = \mathrm{tg}(u)$ *on a* $f(\varphi(u)) = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}(u)^2} = \dfrac{\cos(u)^2}{\cos(u)^2+\sin(u)^2} = \cos(u)^2$ *et* $\varphi'(u) = \dfrac{1}{\cos(u)^2}$. *Ainsi*

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int \frac{\cos(u)^2}{\cos(u)^2}\, du = \int du = u + C = \mathrm{Arctg}(x) + C\,,$$

où on a utilisé que $u = \varphi^{-1}(x) = \mathrm{Arctg}(x)$.

c) Pour $x = \varphi(t) = \mathrm{Log}(t)$ *on a* $f(\varphi(t)) = \dfrac{1}{e^{\mathrm{Log}(t)}+1} = \dfrac{1}{1+t}$ *et* $\varphi'(t) = \dfrac{1}{t}$. *Ainsi*

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x+1}\, dx = \int \frac{1}{t(1+t)}\, dt = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\, dt &= \mathrm{Log}(t) - \mathrm{Log}(t+1) + C \\ &= \mathrm{Log}\Big(1 - \frac{1}{t+1}\Big) + C = \mathrm{Log}\Big(1 - \frac{1}{e^x+1}\Big) + C = -\mathrm{Log}\Big(1 + e^{-x}\Big) + C. \end{aligned}$$

où on a utilisé que $t = \varphi^{-1}(x) = e^x$.

d) Pour $x=\varphi(t)=t^2+1$ *on a* $f(\varphi(t))=(t^2+1)\sqrt{t^2+1-1}=t(t^2+1)$ *et* $\varphi'(t)=2t$. *Ainsi*

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1}\,dx &= \int 2t^2(t^2+1)\,dt=\int 2t^4+2t^2\,dt=\frac{2t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}+C\\ &= \frac{2(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}+C\end{aligned}$$

où on a utilisé que $t=\varphi^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$.

Exercice 4. (Changement de variable)

Calculer les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(x)^5\,dx$ b) $\displaystyle\int_2^3\frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9}\cos(\sqrt{x})\,dx$

Indication : pour a), on peut utiliser $\cos(x)^2+\sin(x)^2=1$ puis le changement de variable $t=\varphi(x)=\cos(x)$. Pour b) on peut poser $x=\varphi(u)=u^2-1$. Pour c) on peut poser $x=\varphi(u)=u^2$.

Sol.:

a) En utilisant que $\sin(x)^2+\cos(x)^2=1$, *on observe que*

$$\sin(x)^5=\Big(1-\cos(x)^2\Big)^2\sin(x)=-f\Big(\varphi(x)\Big)\varphi'(x)$$

avec $t=\varphi(x)=\cos(x)$ *et* $f(t)=(1-t^2)^2$.
Comme les bornes de x *sont* $\alpha=0$ *et* $\beta=\frac{\pi}{2}$, *les bornes de* t *sont* $a=\varphi(\alpha)=1$ *et* $b=\varphi(\beta)=0$. *Ainsi*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\Big(1-\cos(x)^2\Big)^2\sin(x)\,dx &= -\int_1^0(1-t^2)^2\,dt=\int_0^1(1-2t^2+t^4)\,dt\\ &= \Big[t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\Big]_0^1=\frac{8}{15}.\end{aligned}$$

b) On pose $x=\varphi(u)=u^2-1$, $\varphi'(u)=2u$. *Comme* x *varie entre* $a=2=\varphi(\sqrt{3})$ *et* $b=3=\varphi(2)$, *les bornes de* u *sont* $\alpha=\sqrt{3}$ *et* $\beta=2$. *Ainsi*

$$\begin{aligned}\int_2^3\frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx &= 2\int_{\sqrt{3}}^2\frac{u^2}{u^2-1}\,du=2\int_{\sqrt{3}}^2\Big(1+\frac{1}{u^2-1}\Big)\,du\\ &= 2\int_{\sqrt{3}}^2du+\int_{\sqrt{3}}^2\frac{u+1-(u-1)}{(u+1)(u-1)}\,du\\ &= 2\int_{\sqrt{3}}^2du+\int_{\sqrt{3}}^2\frac{1}{u-1}\,du-\int_{\sqrt{3}}^2\frac{1}{u+1}\,du\\ &= \Big[2u+\mathrm{Log}\Big(\Big|\frac{u-1}{u+1}\Big|\Big)\Big]_{\sqrt{3}}^2=4-2\sqrt{3}+\mathrm{Log}\Big(\frac{\sqrt{3}+1}{3(\sqrt{3}-1)}\Big).\end{aligned}$$

c) Le changement de variable à poser est $x=\varphi(u)=u^2$, $\varphi'(u)=2u$. *Comme* x *varie entre* $a=\frac{\pi^2}{16}=\varphi\Big(\frac{\pi}{4}\Big)$ *et* $b=\frac{\pi^2}{9}=\varphi\Big(\frac{\pi}{3}\Big)$, *les bornes de* u *sont* $\alpha=\frac{\pi}{4}$ *et* $\beta=\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9}\cos(\sqrt{x})\,dx=2\int_{\pi/4}^{\pi/3}u\cos(u)\,du &\overset{(*)}{=} 2\Big[u\sin(u)\Big]_{\pi/4}^{\pi/3}-2\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin(u)\,du\\ &= 2\Big[u\sin(u)+\cos(u)\Big]_{\pi/4}^{\pi/3}=1-\sqrt{2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\ ,\end{aligned}$$

oî on a intégré $(*)$ *par parties avec* $f'(u)=\cos(u)$, $g(u)=u$.

Exercice 5. (Intégrale définie)

Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33}))\ \cos(x^{33})\, x^{32}\, dx\,.$$

Sol.: *La formule du changement de variable pour $x = \varphi(u)$ avec $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ est*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\, \varphi'(u)\, du \quad \textit{avec} \quad \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b\,.$$

On pose alors le changement de variable $x = \varphi(u) = u^{1/33}$. Ainsi on a $a = 0 = \varphi(\alpha)$ et $b = \pi^{1/33} = \varphi(\beta)$ si bien que les nouvelles bornes de l'intégrale par rapport à u sont $\alpha = 0$ et $\beta = \pi$.

Comme

$$\varphi'(u) = \frac{1}{33}\, u^{1/33-1}\,,$$

on a

$$\varphi(u)^{32}\varphi'(u) = u^{32/33} \cdot \frac{1}{33}\, u^{1/33-1} = \frac{1}{33}$$

et l'expression à intégrer en u est

$$\sin\Big(\sin\big(\varphi(u)^{33}\big)\Big) \cos\big(\varphi(u)^{33}\big)\varphi(u)^{32}\, \varphi'(u) = \frac{1}{33}\, \sin(\sin(u))\ \cos(u)\,.$$

L'intégrale est alors

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33}))\ \cos(x^{33})\, x^{32}\, dx &= \frac{1}{33}\int_0^\pi \sin(\sin(u))\cos(u)\, du \\ &= \frac{1}{33}\Big[-\cos(\sin(u))\Big]_0^\pi \qquad \textit{car}\ \Big(\sin(u)\Big)' = \cos(u) \\ &= \frac{1}{33}\Big(-\cos(\sin(\pi)) + \cos(\sin(0))\Big) \\ &= \frac{1}{33}(-\cos(0) + \cos(0)) = 0\ .\end{aligned}$$

Exercice 6. (Intégration de développements limités)

Calculer le développement limité d'ordre 7 autour de 0 de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

a) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{Log}(1 + t^2)\, dt$

b) $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{\sin(t)}\, dt$

Sol.:

a) Par le théorème fondamental du calcul intégral on a $f'(x) = \mathrm{Log}(1 + x^2)$. On va donc trouver le développement limité d'ordre 6 de f' autour de 0 et ensuite intégrer comme vu durant le cours. Puisque

$$\mathrm{Log}\big(1 + x^2\big) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + x^6\varepsilon(x)\,,$$

on obtient en intégrant

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{21}x^7 + x^7\varepsilon(x)\,.$$

Pour l'intégration du reste $x^n\varepsilon(x)$, il faut utiliser le théorème de la moyenne (cf. démonstration vue au cours).

b) On commence par écrire f comme composée de deux fonctions :

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{\sin(t)}\,dt = (h\circ g)(x) \quad \textit{avec} \quad g(x) = x^2 \quad \textit{et} \quad h(u) = \int_0^u e^{\sin(t)}\,dt\,.$$

Pour calculer le développement limité d'ordre 7 (ou 8) de f, il suffit donc de calculer le développement limité d'ordre 4 de h ou, par le théorème fondamental du calcul intégral, le développement limité d'ordre 3 de $e^{\sin(t)}$. On a

$$\sin(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t)\ .$$

Il faut substituer ce développement limité dans celui de la fonction e^s autour de $\sin(0) = 0$, c'est-à-dire dans

$$e^s = 1 + s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + s^3\varepsilon(s)\,.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} e^{\sin(t)} &= 1 + \left(t - \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t)\right) + \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(t - \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t)\right)^3 + t^3\varepsilon(t) \\ &= 1 + \left(t - \frac{1}{6}t^3\right) + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t) \\ &= 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + t^3\varepsilon(t)\,. \end{aligned}$$

En intégrant on trouve le développement limité de la fonction h autour de $u = 0$,

$$h(u) = \int_0^u \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + t^3\varepsilon(t)\right) dt = u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + u^4\varepsilon(u)\,,$$

et donc

$$f(x) = h(x^2) = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + x^8\varepsilon(x)\,.$$

Exercice 7. (Fonctions rationnelles)

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x(x+1)^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^4-1}\,dx$

Sol.: *Pour intégrer des fractions polynomiales du type i), ii) et iii), la méthode des éléments simples est particulièrement adaptée.*

a) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x-2}{x(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}\ , \qquad \textit{avec} \qquad \alpha=-2, \quad \beta=2, \quad \gamma=3.$$

Ainsi

$$\int \frac{x-2}{x(x+1)^2}\,dx = \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right)dx = -2\operatorname{Log}|x| + 2\operatorname{Log}|x+1| - \frac{3}{x+1} + C.$$

b) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\alpha x+\beta}{1+x^2} + \frac{\gamma x+\delta}{\left(1+x^2\right)^2}\ , \qquad \textit{avec} \qquad \alpha=1, \quad \beta=0, \quad \gamma=-1, \quad \delta=0,$$

d'oî

$$\int \frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx = \int \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{-x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)dx = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2(1+x^2)} + C.$$

c) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x^2-2}{x^3-x^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x-1}, \qquad \textit{avec} \qquad \alpha=2, \quad \beta=2, \quad \gamma=-1.$$

On obtient donc

$$\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x-1}\right)dx = 2\operatorname{Log}(|x|) - \operatorname{Log}(|x-1|) - \frac{2}{x} + C.$$

d) La décomposition en éléments simples est

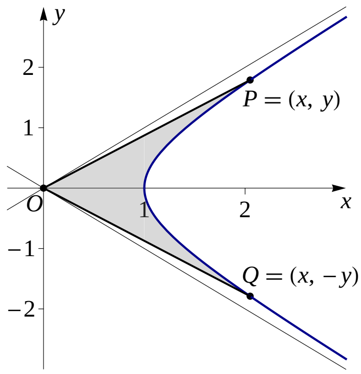
$$\frac{4x}{x^4-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}, \qquad \textit{avec} \qquad \alpha=1, \quad \beta=1, \quad \gamma=-2, \quad \delta=0,$$

d'oî

$$\int \frac{4x}{x^4-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \operatorname{Log}\left(\frac{|x^2-1|}{x^2+1}\right) + C.$$

Exercice 8. (Fonctions hyperboliques)

Soient $P=(x,y)$ et $Q=(x,-y)$ des points de l'hyperbole $x^2-y^2=1$ $(x \geq 1)$ et t l'aire de la région comprise entre l'hyperbole et les rayons OP et OQ (aire grise sur la figure ci-contre). Montrer que $x=\operatorname{ch}(t)$ et $y=\operatorname{sh}(t)$.



Sol.: *Soit la fonction $f\colon [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $y = f(x) = \sqrt{x^2-1}$. L'aire cherchée est alors*

$$t = xy - 2\int_1^x f(w)\,dw = xy - 2\int_1^x \sqrt{w^2-1}\,dw\ .$$

On pose $w = \varphi(u) = \mathrm{ch}(u)$. Ainsi $\varphi'(u) = \mathrm{sh}(u)$ et u varie entre 0 et $a := \mathrm{Arccosh}(x)$ car $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(a) = x$. L'intégrale devient

$$2\int_1^x \sqrt{w^2-1}\,dw = 2\int_0^a \sqrt{\mathrm{ch}(u)^2-1}\cdot \mathrm{sh}(u)\,du = 2\int_0^a \mathrm{sh}(u)^2\,du =: I\ .$$

Pour calculer I, on intègre par parties avec $f'(u) = g(u) = \mathrm{sh}(u)$:

$$\begin{aligned} I = 2\int_0^a \mathrm{sh}(u)^2\,du &= 2\Big[\mathrm{ch}(u)\,\mathrm{sh}(u)\Big]_0^a - 2\int_0^a \underbrace{\mathrm{ch}(u)^2}_{=1+\mathrm{sh}(u)^2}\,du \\ &= 2\,\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(a) - 2\int_0^a 1\,du - I\ . \end{aligned}$$

Il suit que

$$I = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(a) - a = x\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{=y} - \mathrm{ch}(x) = xy - \mathrm{ch}(x)\,.$$

Ainsi $t = xy - I = \mathrm{Arccosh}(x)$ et donc $x = \mathrm{ch}(t)$, $y = \sqrt{x^2-1} = \mathrm{sh}(t)$.

Exercice 9. (V/F : Intégration)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non-vide et borné et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

	V	F
a) f admet une primitive sur I.	☐	☐

Dans la suite on restreint le domaine de f à l'intervalle $[a,b] \subset I$ où $a,b \in I$ tels que $a < b$.

	V	F
b) Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, alors f admet un zéro en $[a,b]$.	☐	☐
c) Si $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, alors $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.	☐	☐
d) Si $f(x) < 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx < 0$.	☐	☐

Soit encore F une primitive de f sur $[a,b]$.

	V	F
e) Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $F(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.	☐	☐
f) Pour tout $x \in [a,b]$, on a $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.	☐	☐

Sol.:

a) *VRAI.*
Soit $a \in I$ (donc a n'est pas une borne de I). On va montrer que pour tout $x \in I$, la fonction F définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est une primitive de f en vérifiant que $F'(x) = f(x)$ à l'aide de la définition de la dérivée. En effet, on a

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Noter que la dernière égalité reste vraie pour $h < 0$ car $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = -\int_{x+h}^x f(t)\,dt$. Par le théorème de la moyenne (f est continue sur l'intervalle $[x, x+h] \subset I$ si $h > 0$ ou $[x+h, x] \subset I$ si $h < 0$), il suit que $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(u_h)h$ pour un $u_h \in]x, x+h[$ si $h > 0$ ou $u_h \in]x+h, x[$ si $h < 0$. Ainsi on a

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\, h f(u_h) = \lim_{h\to 0} f(u_h) = f(x)$$

parce que $u_h \to x$ quand $h \to 0$ et que f est continue sur I.

b) *VRAI.*
Par le théorème de la moyenne, il existe $u \in]a, b[$ tel que $0 = \int_a^b f(x)\,dx = f(u)(b-a)$. Comme $b > a$, on doit avoir $f(u) = 0$.

c) *FAUX.*
Prendre par exemple $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-1, 2]$. Alors $\int_{-1}^2 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 = \frac{3}{2} \geq 0$ mais $f(-1) = -1 < 0$.

d) *VRAI.*
Par le théorème de la moyenne, il existe $u \in]a, b[$ tel que $\int_a^b f(x)\,dx = f(u)(b-a)$. Comme on a $f(u) < 0$ et que $b > a$, le résultat suit.

e) *FAUX.*
Prendre par exemple $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-2, -1]$. Ainsi $f(x) \leq 0$ sur $[-2, -1]$ mais $F(x) = \frac{1}{2}x^2 > 0$ pour tout $x \in [-2, -1]$.

f) *FAUX.*
Considérer par exemple la fonction constante $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Alors $F(x) = x + 1$ est une primitive de f mais

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x dt = x - 0 = x \neq x + 1 = F(x).$$