Analyse I – Série 13 - bis

Quelques derniers exercices sur les intégrales généralisées...

Exercice 1. (Intégrales généralisées)

Calculer - si elles convergent - les intégrales généralisées suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx$ c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \operatorname{Log} x\,dx$ e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$ f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sin(\operatorname{Log} x)\,dx$

Sol.:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\operatorname{Arctg} x\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$
car $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{2}$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

b) $x^2-2x+1 = (x-1)^2$ *et donc* $\displaystyle\frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{1}{(x-1)^2}$. *Le problème n'est pas en* $\pm\infty$ *mais en* $x=1$. *On a donc*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x-1}\Big]_{-\infty}^{1} + \Big[-\frac{1}{x-1}\Big]_{1}^{\infty}.$$

Aucune des 2 intégrales ne converge (en $x=1$*).*

c)

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = 2\sqrt{x-1}\Big|_{1}^{2} = 2 - 0 = 2.$$

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \operatorname{Log} x\,dx = \Big[x \operatorname{Log} x - x\Big]_{0^+}^{1} = -1$ *car* $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \operatorname{Log} x = 0$

e) on pose $u=\sqrt{x}$ *ce qui donne* $x=u^2$ *et* $dx = 2u\,du$ *et on intègre par parties. Alors*

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx = \int_{0}^{\infty} 2ue^{-u}\,du = \Big[-2ue^{-u}\Big]_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} -2e^{-u}\,du = 0 - \Big[2e^{-u}\Big]_{0}^{\infty} = 2$$

On a utilisé que $\displaystyle\lim_{u\to\infty} ue^{-u} = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{u\to\infty} e^{-u} = 0$.

f) On pose $x = e^t$ *et alors* $dx = e^t\,dt$. *Notons que si* $x=0^+$ *alors* $t\to-\infty$ *et si* $x=1$ *alors* $t=0$. *On obtient*

$$\int_{0}^{1} \sin(\operatorname{Log} x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \sin(t)e^t\,dt$$

En intégrant 2 fois par parties, on trouve que

$$\int \sin(t)e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + C.$$

Alors

$$\int_{-\infty}^{0} \sin(t)e^t\, dt = \left[\frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t)\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}e^0(\sin 0 - \cos 0) = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 2. (Intégrales généralisées)

Calculer les intégrales généralisées suivantes, si elles convergent.

a) $I = \displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{1}{x^p}\, dx\,,\ p \in \mathbb{R}$

b) $I = \displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx\,,\ p \in \mathbb{R}$

c) $I = \displaystyle\int_{0}^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

d) $I = \displaystyle\int_{0+}^{1/2} \frac{1}{x\,\mathrm{Log}(x)}\, dx$

e) $I = \displaystyle\int_{e}^{\infty} \frac{\mathrm{Log}^2(x)}{x^2}\, dx$

f) $I = \displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx$

g) $I = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \sin(x)\, e^{-x}\, dx$

h) $I = \displaystyle\int_{0+}^{\infty} e^{-x}(1-x)\,\mathrm{Log}(x)\, dx$

Sol.:

a) *Nous avons ici une intégrale de type 1. Pour $p \neq 1$ posons*

$$\mathcal{I}_\varepsilon = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^p}\, dx$$

On a pour $p \neq 1$:

$$\mathcal{I}_\varepsilon = \left[\frac{1}{1-p}\frac{1}{x^{p-1}}\right]_{\varepsilon}^{1} = \frac{1}{1-p}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\right)$$

Si $p-1<0$, on a $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} = 0$.

Et donc

$$\mathcal{I} = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \frac{1}{1-p}$$

Si $p-1>0$ la limite n'existe pas et l'intégral est divergente.

Si $p=1$, on a

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \mathrm{Log}(1) - \mathrm{Log}(\varepsilon) = -\mathrm{Log}(\varepsilon).$$

Or $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+} \mathrm{Log}(\varepsilon) = -\infty$, et l'intégral est divergente.

Finalement, l'intégral est convergente si et seulement si $p<1$.

b) *Nous avons ici une intégrale de type 2.*

Posons

$$\mathcal{I}_R = \int_{1}^{R} \frac{1}{x^p}\, dx$$

On a pour $p \neq 1$:

$$\mathcal{I}_R = \left[\frac{1}{1-p}\frac{1}{x^{p-1}}\right]_{1}^{R} = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{R^{p-1}}\right)$$

Si $p-1>0$ on a $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^{p-1}} = 0$.

Et donc

$$\mathcal{I} = \lim_{R\to+\infty} \mathcal{I}_R = \frac{1}{p-1}$$

Si $p-1<0$, la limite n'existe pas et l'intégral est divergente.
Si $p=1$ on a

$$\int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \mathrm{Log}(R) - \mathrm{Log}(1) = \mathrm{Log}(R).$$

Or $\lim_{R\to\infty} \mathrm{Log}(R) = \infty$, et l'intégral est divergente.
Finalement, l'intégral est convergente si et seulement si $p>1$.

c) *Nous avons ici une intégrale de type 1.*
Posons

$$\mathcal{I}_{1-\varepsilon} = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\mathrm{Arcsin}(x)]_0^{1-\varepsilon} = \mathrm{Arcsin}(1-\varepsilon)$$

Et donc

$$\mathcal{I} = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_{1-\varepsilon} = \mathrm{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$$

Car la fonction $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$ est continue sur $[-1,1]$.

d) *Posons*

$$\mathcal{I}\varepsilon = \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\,\mathrm{Log}(x)}\,dx$$

Opérons le changement de variable suivant : $t = \mathrm{Log}(x)$ et donc $dt = \frac{1}{x}dx$. $x=\varepsilon \implies t = \mathrm{Log}(\varepsilon)$ et $x = \frac{1}{2} \implies t = -\mathrm{Log}(2)$.
Ainsi,

$$\mathcal{I}\varepsilon = \int_{\mathrm{Log}(\varepsilon)}^{-\mathrm{Log}(2)} \frac{1}{t}\,dt = [\mathrm{Log}\,|t|]_{\mathrm{Log}(\varepsilon)}^{-\mathrm{Log}(2)} = \mathrm{Log}(\mathrm{Log}(2)) - \mathrm{Log}\,|\mathrm{Log}(\varepsilon)|$$

Or

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{Log}\,|\mathrm{Log}(\varepsilon)| = +\infty$$

Donc $\mathcal{I}$ est une intégrale divergente.

e) *C'est une intégrale généralisée de type 2 qui est définie par la limite*

$$I = \int_e^\infty \frac{\mathrm{Log}^2(x)}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_e^R \frac{\mathrm{Log}^2(x)}{x^2}\,dx\,.$$

On intègre dans l'intégrale de droite par parties avec $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ [$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x}$] et $g(x) = \mathrm{Log}^2(x)$ [$\Rightarrow g'(x) = 2\,\mathrm{Log}(x)\frac{1}{x}$]

$$\begin{aligned}\int_e^R \frac{\mathrm{Log}^2(x)}{x^2}\,dx &= \left[-\frac{1}{x}\,\mathrm{Log}^2(x)\right]_e^R - \int_e^R \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{2\,\mathrm{Log}(x)}{x}\,dx \\ &= -\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}^2(R) + \frac{1}{e} + \int_e^R \frac{2\,\mathrm{Log}(x)}{x^2}\,dx\end{aligned}$$

On intègre par partie encore une fois avec $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ [$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x}$] et $g(x) = 2\,\mathrm{Log}(x)$ [$\Rightarrow g'(x) = \frac{2}{x}$]

$$\begin{aligned}\int_e^R \frac{2\,\mathrm{Log}(x)}{x^2}\,dx &= \left[-\frac{2}{x}\,\mathrm{Log}(x)\right]_e^R - \int_e^R \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x}\,dx \\ &= -\frac{2}{R}\,\mathrm{Log}(R) + \frac{2}{e} + \int_e^R \frac{2}{x^2}\,dx \\ &= -\frac{2}{R}\,\mathrm{Log}(R) + \frac{2}{e} - \frac{2}{R} + \frac{2}{e}\,.\end{aligned}$$

Pour l'intégrale généralisée I on trouve donc

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_e^R \frac{\mathrm{Log}^2(x)}{x^2}\, dx = \lim_{R\to\infty} \Big(-\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}^2(R) + \frac{1}{e} - \frac{2}{R}\,\mathrm{Log}(R) + \frac{2}{e} - \frac{2}{R} + \frac{2}{e}\Big) \\ = \frac{5}{e}\,,$$

où on a utilisé Bernoulli-l'Hospital pour calculer les limites

$$\lim_{R\to\infty}\Big(-\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}(R)\Big) = -\lim_{R\to\infty}\frac{\mathrm{Log}(R)}{R} = -\lim_{R\to\infty}\frac{\frac{1}{R}}{1} = -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R} = 0\,.$$

et

$$\lim_{R\to\infty}\Big(-\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}^2(R)\Big) = -\lim_{R\to\infty}\frac{2\,\mathrm{Log}(R)\frac{1}{R}}{1} = -\lim_{R\to\infty}\frac{2\,\mathrm{Log}(R)}{R} = 0.$$

f) C'est une intégrale généralisée de type 1 qui s'écrit

$$I = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{1+\delta}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx\,.$$

Pour calculer l'intégrale à droite, on pose le changement de variable $x = \varphi(u) = u^2+1$, $\varphi'(u) = 2u$ et on écrit $\delta = \varepsilon^2$ avec $\varepsilon > 0$ pour simplifier la notation. Comme x varie entre $1+\varepsilon^2 = \varphi(\varepsilon)$ et $2 = \varphi(1)$, on a

$$\begin{aligned} I = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon^2}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{\varphi(u)}{\sqrt{\varphi(u)-1}}\,\varphi'(u)\, du \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{u^2+1}{\sqrt{u^2}}\, 2u\, du = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 2(u^2+1)\, du \\ &= 2\int_0^1 (u^2+1)\, du \\ &= 2\Big[\frac{1}{3}u^3 + u\Big]_0^1 = 2\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3}\,. \end{aligned}$$

Notez qu'on a pu enlever la limite parce que l'expression en u est (dans ce cas, pas de manière générale) bien définie aux nouvelles bornes.

g) Il s'agit d'une intégrale généralisée de type 2 qui est définie par la limite

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \sin(x)\, e^{-x}\, dx\,.$$

On intègre par parties avec $f'(x) = e^{-x}$ [$\Rightarrow f(x) = -e^{-x}$] et $g(x) = \sin(x)$ [$\Rightarrow g'(x) = \cos(x)$]. On obtient

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \sin(x)\, e^{-x}\, dx = \lim_{R\to\infty}\Big[-\sin(x)\, e^{-x}\Big]_0^R + \lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos(x)\, e^{-x}\, dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\Big(-\sin(R)\, e^{-R}\Big) + \lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos(x)\, e^{-x}\, dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos(x)\, e^{-x}\, dx \end{aligned}$$

car $\lim_{R\to\infty}\Big(\sin(R)\, e^{-R}\Big) = 0$. En effet, on a $\lim_{R\to\infty} e^{-R} = 0$ et $-1 \le \sin(R) \le 1$, ce qui permet de conclure par le théorème des deux gendarmes.

On intègre une deuxième fois par parties avec $f'(x) = e^{-x}$ *et* $g(x) = \cos(x)$ *[*$\Rightarrow g'(x) = -\sin(x)$*] pour obtenir*

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty} \Big[-\cos(x)\, e^{-x} \Big]_0^R - \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sin(x)\, e^{-x}\, dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \Big(-\cos(R)\, e^{-R} + 1 \Big) - I \\ &= 1 - I \end{aligned}$$

car $\lim_{R\to\infty} \Big(-\cos(R)\, e^{-R} \Big) = 0$ *(conclusion par le théorème des deux gendarmes comme ci-dessus).*
On a donc $I = 1 - I$*, ou*

$$I = \frac{1}{2}\,.$$

h) *Cette intégrale de type 3 est définie par la limite*

$$I = \lim_{R\to+\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} I_{\varepsilon,R}$$

avec

$$I_{\varepsilon,R} = \int_\varepsilon^R e^{-x}(1-x)\, \mathrm{Log}(x)\, dx\,.$$

On intègre par parties avec $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ *et* $g(x) = \mathrm{Log}(x)$ *[*$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$*]. Pour trouver* $f(x)$ *qui est une primitive de* $f'(x)$*, on intègre aussi par parties avec* $u'(x) = e^{-x}$ *[*$\Rightarrow u(x) = -e^{-x}$*] et* $v(x) = 1 - x$ *[*$\Rightarrow v'(x) = -1$*]. Ainsi on obtient*

$$f(x) = \int e^{-x}(1-x)\, dx = -e^{-x}(1-x) - \int (-e^{-x})(-1)\, dx = x\, e^{-x}\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon,R} &= \Big[x\, e^{-x}\, \mathrm{Log}(x) \Big]_\varepsilon^R - \int_\varepsilon^R x\, e^{-x}\, \frac{1}{x}\, dx = R\, e^{-R}\, \mathrm{Log}(R) - \varepsilon\, e^{-\varepsilon}\, \mathrm{Log}(\varepsilon) - \int_\varepsilon^R e^{-x}\, dx \\ &= R\, e^{-R}\, \mathrm{Log}(R) - \varepsilon\, e^{-\varepsilon}\, \mathrm{Log}(\varepsilon) - \Big[-e^{-x} \Big]_\varepsilon^R = R\, e^{-R}\, \mathrm{Log}(R) - \varepsilon\, e^{-\varepsilon}\, \mathrm{Log}(\varepsilon) + e^{-R} - e^{-\varepsilon}\,. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\, \mathrm{Log}(\varepsilon)) = 0$ *(Bernoulli-l'Hospital) on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\varepsilon,R} = R\, e^{-R}\, \mathrm{Log}(R) + e^{-R} - 1$$

et puisque

$$\lim_{R\to\infty} R\, e^{-R}\, \mathrm{Log}(R) = \lim_{R\to\infty} \frac{R\, \mathrm{Log}(R)}{e^R} = 0$$

par Bernoulli-l'Hospital, on a finalement

$$I = \lim_{R\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} I_{\varepsilon,R} = -1\,.$$