

# Corrigé série 12

## Exercice 1 (5 points)

- a)  $e^{\frac{3\pi i}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + -i = -i$
- b)  $\sqrt{2}ie^{\frac{\pi i}{2}} = \sqrt{2}i\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}ii = -\sqrt{2}$
- c)  $\frac{2e^{\frac{\pi i}{3}}}{1+i} = \frac{2\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}{1+i} = \frac{\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i}{2}$
- d)  $\frac{i}{e^{\frac{\pi i}{4}}} = \frac{i}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

## Exercice 2 (5 points)

- a)  $e^{1+i} = ee^i = e(\cos(1) + i \sin(1))$ . Ainsi le module est  $e$  et l'argument 1.
- b)  $e^{e^i} = e^{\cos(1)+i \sin(1)} = e^{\cos(1)}e^{i \sin(1)} = e^{\cos(1)}(\cos \sin(1) + i \sin \sin(1))$ . Le module est  $e^{\cos(1)}$  et l'argument  $\sin(1)$ .
- c)  $e^{e^{\pi i}} = e^{-1}$ . Le module est  $e^{-1}$  et l'argument est zéro.
- d)  $e^{-2i} = \cos(-2) + i \sin(-2)$ . Le module est 1 et l'argument est  $-2$ .

## Exercice 3 (10 points)

- a) **Vrai**. Cela découle des définitions.
- b) **Faux**. Il découle de la périodicité des fonctions trigonométriques que

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi)}, \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}.$$

- c) **Vrai**. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  fixés. On veut prouver qu'il existe  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que

$$a + bi = e^{x+yi}.$$

Cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} e^x \cos(y) = a \\ e^x \sin(y) = b \end{cases}$$

Dans le cas où  $a$  ou  $b$  est zéro, on arrive facilement à trouver une solution. Supposons que  $a, b \neq 0$ . Alors, on définit

$$y = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{et} \quad x = \ln\left(\frac{a}{\cos(y)}\right),$$

Ici,  $y$  est, *a priori*, dans  $] -\pi/2, \pi/2[$ , mais on “le décale” si besoin de  $\pi$  de sorte que

$$\frac{a}{\cos(y)} > 0.$$

On vérifie facilement que  $x$  et  $y$  ainsi définis satisfont le système.

- d) **Faux.** La composée d’une homothétie de rapport différent de  $\pm 1$  et d’une translation non-triviale n’est pas une isométrie, et n’est pas une autre homothétie.
- e) **Faux.** La similitude  $z \mapsto \bar{z} + 1$  est indirecte, mais n’a pas de point fixe (donc, *a fortiori*, pas d’axe invariant).

**Exercice 4** (10 points)

Comme  $\ln_{\mathbb{C}}(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ , il nous suffit de déterminer le module et l’argument des nombres proposés.

- a)  $\ln_{\mathbb{C}}(\pi) = \ln|\pi| = \ln(\pi)$ .
- b)  $\ln_{\mathbb{C}}(\pi i) = \ln|\pi i| + i\frac{\pi}{2} = \ln(\pi) + i\frac{\pi}{2}$ .
- c)  $\ln_{\mathbb{C}}(e^{\pi i}) = \ln|e^{\pi i}| + i\pi = \ln|-1| + i\pi = i\pi$ .
- d)  $\ln_{\mathbb{C}}(-\pi i) = \ln|-\pi i| + i\frac{-\pi}{2} = \ln(\pi) - i\frac{\pi}{2}$ .
- e)  $\ln_{\mathbb{C}}(i + 1) = \ln|i + 1| + i\frac{\pi}{4} = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$ .

**Exercice 5** (10 points)

- a)  $z' = z + 3 - 2i$ .
- b)  $z' = z \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = zi$ .
- c)  $z' = (z - (3 - i)) \left( \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right) + (3 - i) = (z - 3 + i)\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) + (3 - i)$ .
- d)  $z' = \bar{z}$ , car  $\theta = 0$  et  $c = 0$ .
- e) L’axe a pour équation  $y = 2x + 4$ , donc  $\theta = \arctan(2)$  et on peut choisir  $c = 4i$  par exemple.

De plus,  $e^{2i\theta} = (\cos(\arctan(2)) + i \sin(\arctan(2)))^2 = \left(\frac{1 + 2i}{\sqrt{1 + 4}}\right)^2 = \frac{-3 + 4i}{5}$ . On a alors

$$z' = \frac{-3 + 4i}{5} \overline{(z - 4i)} + 4i = \frac{(4i - 3)\bar{z} + 8i - 16}{5}$$

- f)  $z' = -2z$ .
- g)  $z' = 3(z - (3 - 2i)) + 3 - 2i = 3z + 4i - 6$ .

**Exercice 6** (10 points)

- a) Symétrie d'axe  $i\mathbb{R}$ , car  $e^{2i\theta} = -1$ , donc  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et  $c = 0$ .
- b) Translation par le vecteur  $3 - 2i$ .
- c) On a  $e^{2i\theta} = i$ , donc  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . La pente de l'axe de symétrie est donc égale à 1. On remarque ensuite qu'on peut écrire

$$f(z) = i\bar{z} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i + \frac{3}{2}i + \frac{3}{2} = i\overline{\left(z + \frac{3}{2}i\right)} - \frac{3}{2}i + \frac{3}{2}(1+i).$$

On a donc une composition d'une translation par  $\frac{3}{2}(1+i)$  et d'une symétrie d'axe  $2x - 2y - 3 = 0$ .

- d) Rotation de centre  $(0, 0)$  et de rapport  $\frac{\pi}{3}$ , car  $e^{i\theta} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , donc  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .
- e) On a une multiplication par  $1 + i = \sqrt{2} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ . On a donc une composition d'une rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et d'une homothétie de rapport  $\sqrt{2}$ .

Pour trouver le centre, il faut chercher le point fixe en résolvant l'équation  $f(z) = z$ . On obtient que le point fixe est  $1 + i$ .

Ainsi, on a une composition d'une rotation de centre  $(1, 1)$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et d'une homothétie de centre  $(1, 1)$  et de rapport  $\sqrt{2}$ .

- f) On a une multiplication par  $1 + \sqrt{3}i = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ . On a donc une composition d'une homothétie de rapport 2 et d'une symétrie d'axe de pente  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Pour trouver le centre, il faut chercher le point fixe en résolvant l'équation  $f(z) = z$ . On obtient que le point fixe est  $\frac{2-2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}-3}{3}i$ .

Ainsi, on a une composition d'un homothétie de centre  $\left(\frac{2-2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}-3}{3}\right)$  et de rapport 2 et d'une symétrie d'axe  $3\sqrt{3}x - 9y + \sqrt{3} - 3 = 0$ .

**Exercice 7** (10 points)

On voit que l'équation de la similitude sera de la forme

$$f(z) = c \cdot z + b$$

avec  $c, b \in \mathbb{C}$ . En écrivant  $c = c_1 + c_2i$  et  $b = b_1 + b_2i$ , on arrive facilement à ramener le problème à un système linéaire d'équations, et on trouve

$$f(z) = \left(\frac{3-i}{2}\right)z + \frac{9+13i}{2}.$$

Il s'agit de la composition d'une rotation de centre  $(2, -11)$  et d'angle  $-18, 43^\circ$  et d'une homothétie de centre  $(2, -11)$  et de rapport  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ .

**Exercice 8** (10 points)

Un homothétie est caractérisée par un rapport d'homothétie  $R \neq 0$  et un centre d'homothétie  $c \in \mathbb{C}$ . De plus, on sait que toute similitude directe s'écrit comme

$$z \mapsto az + b,$$

où  $a, b \in \mathbb{C}$ . Comme l'image de  $c$  par l'homothétie est  $c$  et l'image de  $c + 1$  est  $c + R$ , on a les deux conditions

$$ac + b = c \text{ et } a(c + 1) + b = c + R,$$

d'où on déduit facilement que  $a = R$  et  $b = c(1 - R)$ . Ainsi, l'homothétie s'écrit

$$z \mapsto Rz + c(1 - R) = R(z - c) + c.$$

**Exercice 9** (5 points)

Considérons les points  $re^{i\theta}$  où  $r > 0$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ . Alors, par application du logarithme, on a

$$\ln |r| + i\theta.$$

En laissant  $\theta$  parcourir  $]-\pi, \pi[$ , cet ensemble de point correspond à un "segment vertical" de longueur  $2\pi$  ayant pour milieu le point  $]\ln(r), 0[$ .