Série 15

Exercice 1. Effectue les sommes et différences suivantes :

a) $\dfrac{2x+1}{2(x+2)} - \dfrac{3x^2}{(x+2)^2}$

b) $\dfrac{x+4}{x-5} + \dfrac{3}{5-x}$

c) $\dfrac{x}{x^2-y^2} - \dfrac{x}{(x+y)^2} + \dfrac{1}{2(y-x)}$

d) $\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x+1}{x^2+1}$

e) $\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-2y}{x+y} + \dfrac{x^2+3y^2}{y^2-x^2}$

f) $\dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{4x-6y}{xy+3y+2x+6} + \dfrac{y+6}{y+2}$

g) $\dfrac{-3x^4}{(x+1)^4} + \dfrac{4x^3(x+1)^3}{(x+1)^6}$

h) $\dfrac{2}{5b} - \dfrac{4}{3a^3} - \dfrac{1}{6a^2b^2}$

i) $\dfrac{3x}{3x^2-12x} + \dfrac{1}{6x}$

j) $\dfrac{m-1}{m^2-4m+4} + \dfrac{m+3}{m^2-4} + \dfrac{2}{2-m}$

Exercice 2. Simplifie les fractions suivantes :

a) $\dfrac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a}}$;

b) $\dfrac{\frac{2}{x+h} - \frac{2}{x}}{h}$;

c) $\dfrac{\frac{y-2}{y^2-4y+4}}{\frac{y^2+2y}{y^2+4y+4}}$;

d) $\dfrac{u - \frac{1}{u}}{1 - \frac{1}{u^2}}$;

e) $\dfrac{x - \frac{1}{1-\frac{1}{x}}}{\frac{x}{x+1} - \frac{x}{1-x}}$;

f) $\dfrac{1 - \frac{1}{1+\frac{x}{y}}}{1 - \frac{1}{1-\frac{x}{y}}}$;

g) $\dfrac{\frac{4}{y} - y}{\frac{2}{y^2} - \frac{1}{2}}$.

Exercice 3. En utilisant la définition de l'addition de fractions rationnelles, vérifie que la somme de fractions rationnelles est *associative* : si $\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{F(x)}{G(x)}, \frac{p(x)}{q(x)} \in K(x)$, alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \left(\frac{F(x)}{G(x)} + \frac{p(x)}{q(x)}\right) = \left(\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{F(x)}{G(x)}\right) + \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Exercice 4. En utilisant la définition de l'addition de fractions rationnelles, vérifie que le produit de fractions rationnelles est *distributif* par rapport à l'addition, c'est-à-dire si $\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{F(x)}{G(x)}, \frac{p(x)}{q(x)} \in K(x)$, alors

$$\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{F(x)}{G(x)} + \frac{p(x)}{q(x)}\right) = \frac{f(x)}{g(x)}\frac{F(x)}{G(x)} + \frac{f(x)}{g(x)}\frac{p(x)}{q(x)}.$$

Exercice 5. Vérifie que $(K(x), +, \cdot)$ forme un corps.

Exercice 6. Vérifie les égalités suivantes :

a) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}{\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{yz}} \cdot \dfrac{x+y+z}{xy+xz+yz} = \dfrac{x+3y+5z}{\dfrac{5}{xy}+\dfrac{3}{xz}+\dfrac{1}{yz}} \cdot \dfrac{1}{xyz}$;

b) $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{(x+y)(y+z)(x+z)}{xyz}+1.$

Exercice 7. On ajoute au groupe des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ les symboles ∞ ("infini") et $-\infty$ ("moins l'infini"). On impose les conventions suivantes d'addition : $n+\infty=\infty$ pour tout $n \in \mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ et $n-\infty=-\infty$ pour tout $n \in \mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$.

On définit le *degré* d'une fraction rationnelle $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ comme $\deg\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \deg(f(x)) - \deg(g(x))$. Rappelons la convention que $\deg(0) = -\infty$.

a) Démontre que le degré d'une fraction rationnelle est bien défini, c'est-à-dire que le degré ne dépend pas du représentant choisi de la classe d'équivalence $\frac{f(x)}{g(x)}$.

b) Quel est le degré de $\frac{1}{x^n}$?

c) Montre que la formule $\deg\left(\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{F(x)}{G(x)}\right) = \max\left(\deg\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right);\deg\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)\right)$ est fausse (où $\max(x;y)$ désigne ici le "maximum de x et y"), mais que la formule

$$\deg\left(\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{F(x)}{G(x)}\right) \leq \max\left(\deg\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right);\deg\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)\right)$$

est vraie.

d) Montre que la formule $\deg\left(\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{F(x)}{G(x)}\right) = \deg\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)+\deg\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)$ est vraie.

e) Vrai ou faux ? Si $\deg\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 1$, alors la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{g(x)}$ est une constante. Justifie ta réponse.