Corrigé 14 : référentiels tournants

1. **Le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel accéléré**

(a) i. Dans le référentiel fixe, le bloc est initialement au repos, $\vec{v}_{\text{init.}} = \vec{0}$, et subit une accélération $g \sin\alpha$ le long du plan incliné (selon $\hat{e}_1$). L'évolution de sa vitesse est donc

$$\vec{v}_1(t) = g \sin\alpha \, t \, \hat{e}_1 \,.$$

Le temps de parcours t_{p} peut être obtenu grâce à la longueur $h/\sin\alpha$ du pacours :

$$s_1(t_{\text{p}}) = \frac{1}{2} g \sin\alpha \, t_{\text{p}}^2 = \frac{h}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad t_{\text{p}} = \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2\alpha}} \,.$$

Initialement, dans le référentiel accéléré, le bloc est également au repos, $\vec{v}'_{\text{init.}} = \vec{0}$. Ensuite, il subit une accélération $g \cos\alpha \sin\alpha$ selon $\hat{a}_1$. L'évolution de sa vitesse est ainsi

$$\vec{v}'_1(t) = g \cos\alpha \sin\alpha \, t \, \hat{a}_1 \,.$$

ii. Dans le référentiel d'inertie, la vitesse finale du bloc est donnée par

$$\vec{v}_{\text{fin.}} = g \sin\alpha \, t_{\text{p}} \, \hat{e}_1 = \sqrt{2gh} \, \hat{e}_1 \,.$$

Dans le référentiel accéléré, le bloc a, au bas du plan incliné, après un temps t_{p}, une vitesse

$$\vec{v}'_{\text{fin.}} = \sqrt{2gh} \cos\alpha \, \hat{a}_1 \,.$$

Ainsi, la différence d'énergie cinétique est donnée par, dans le référentiel fixe,

$$\Delta K = \frac{1}{2} m (v_{\text{fin.}}^2 - v_{\text{init.}}^2) = mgh \,.$$

Cette expression est différente de celle que l'on obtient dans le référentiel accéléré :

$$\Delta K' = \frac{1}{2} m (v_{\text{fin.}}'^2 - v_{\text{init.}}'^2) = mgh \cos^2\alpha \,.$$

iii. Du point de vue du référentiel accéléré, le bloc subit son poids $m\vec{g}$, la force de soutien du plan incliné $\vec{N}$ et une force d'inertie $-m \sin^2\alpha \, \vec{g}$. La résultante des forces agissant sur le bloc correspond donc à la composante selon $\hat{a}_1$ de $\vec{N}$. Cette force est constante, vaut $mg \cos\alpha \sin\alpha$, et son travail entre le sommet et le bas du plan incliné est donné par

$$W'_{\text{init.}\to\text{fin.}} = mg \cos\alpha \sin\alpha \cdot \frac{h}{\tan\alpha} = mgh \cos^2\alpha \,.$$

Le théorème de l'énergie cinétique est donc bien vérifié dans le référentiel accéléré. Remarquons que la force de soutien ne travaille pas dans le référentiel fixe (elle est perpendiculaire au mouvement), alors qu'elle travaille dans le référentiel accéléré (elle n'est alors plus perpendiculaire au mouvement).

(b) i. Par rapport au référentiel fixe $\mathcal{O}$, la vitesse du paquet ne varie pas. La variation d'énergie cinétique est donc nulle :

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_{\text{init}}^2 - v_{\text{imp}}^2) = \frac{1}{2}m(v_0^2 - v_0^2) = 0\,.$$

Par rapport au référentiel accéléré $\mathcal{A}$, la vitesse initiale est donnée par

$$\vec{v}_{\text{init}}^{\,\prime} = \vec{v}_0 - \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_{\text{init}}}\,.$$

Or, les vecteurs $\vec{v}_0$ et $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_{\text{init}}}$ sont perpendiculaires. Le carré de la norme de la vitesse a donc pour expression

$$v_{\text{init}}^{\prime\,2} = v_0^2 + \omega_0^2 r_{\text{init}}^2\,,$$

avec $r_{\text{init}} = ||\overrightarrow{AP_{\text{init}}}||$. Quant à la norme de la vitesse au moment de l'impact, elle s'écrit (voir série précédente)

$$v_{\text{imp}}^{\prime} = \sqrt{2}v_0\,.$$

La variation d'énergie cinétique est donc donnée par

$$\Delta K' = \frac{1}{2}m(v_{\text{init}}^{\prime\,2} - v_{\text{imp}}^{\prime\,2}) = \frac{1}{2}m(v_0^2 - \omega_0^2 r_{\text{init}}^2)\,.$$

ii. Dans le référentiel fixe, le paquet ne subit aucune force. Dans le référentiel accéléré, il est soumis à une force d'inertie centrifuge

$$\vec{F}_{\text{inertie}} = -m\,\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) = +m\,\omega_0^2\,r\,\hat{e}_r\,,$$

où $r = ||\overrightarrow{AP}||$.
Le travail de la force centrifuge entre le point initial et le point d'impact est donné par

$$\begin{aligned} W_{\text{init.}\to\text{fin.}}^{\prime} &= \int_{P_{\text{init}}}^{P_{\text{imp}}} \vec{F}_{\text{inertie}} \cdot \vec{dl} = \int_{r_{\text{init}}}^{r_{\text{imp}}} m\omega_0^2 r dr = \frac{m\omega_0^2}{2}(r_{\text{imp}}^2 - r_{\text{init}}^2) \\ &= E_{\text{pot}}(r_{\text{init}}) - E_{\text{pot}}(r_{\text{imp}})\,, \end{aligned}$$

où

$$E_{\text{pot}}(r) = -\frac{1}{2}m\,\omega_0^2 r^{\,2} + \text{constante}$$

est l'énergie potentielle associée à la force d'inertie.
Comme $\omega_0 = v_0/r_{\text{imp}}$ (voir série précédente), le théorème de l'énergie cinétique est donc bien vérifié dans le référentiel accéléré :

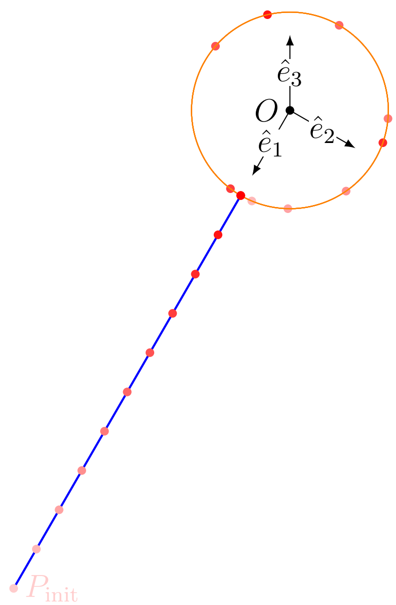
$$\Delta K^{\prime} = W_{\text{init.}\to\text{fin.}}^{\prime}\,.$$

2. **Un paquet (suite...)**

Trajectoire	a	v_0	$\dot{\omega}$	ω_0
Γ_1	0	1	0	1
Γ_4	1	0	0	1
Γ_2	0	1	1	0
Γ_3	1	0	1	0

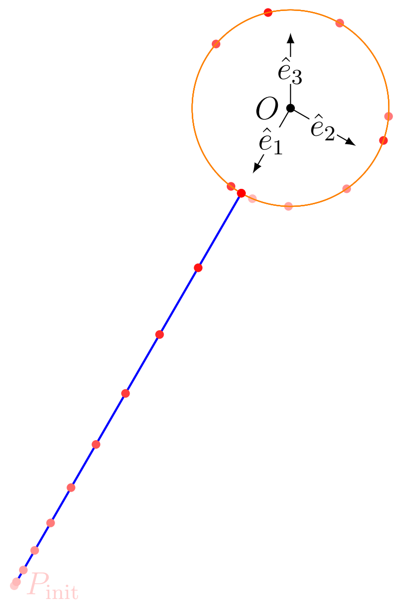
— Trajectoire Γ_2 : les bras de la spirale se resserrent au cours de la descente du paquet. Cela indique que la vitesse angulaire de la planète augmente.

Relativement à $\mathcal{O}$:



— Trajectoire Γ_3 : les espacements entre les bras de la spirale semblent réguliers mais chaque tour prend de moins en moins de temps. Cela indique que la vitesse du paquet et la vitesse angulaire de la planète augmentent (combinaison des cas Γ_2 et Γ_4).

Relativement à $\mathcal{O}$:



— Trajectoire Γ_4 : les bras de la spirale se desserrent au cours de la descente du paquet. Cela indique que la vitesse du paquet augmente.

Relativement à $\mathcal{O}$: