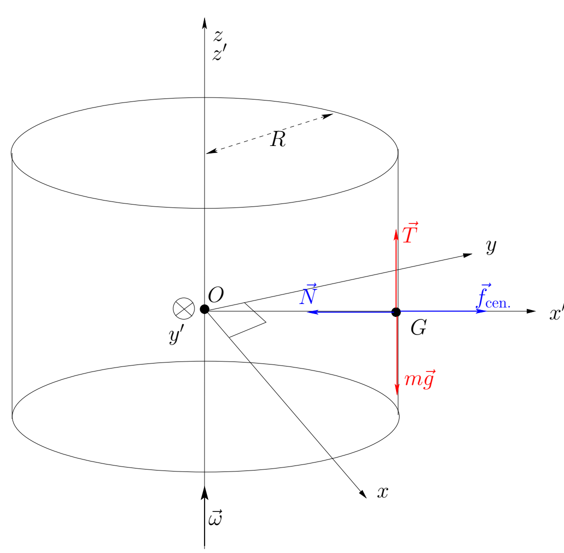
Série 14 : Référentiels tournants

Question conceptuelle

Dans le référentiel lié au carrousel, la personne sur le tabouret est initialement au repos. Quand elle écarte les bras, ceux-ci ont temporairement une vitesse relativement au carrousel, perpendiculaire au vecteur vitesse angulaire, et subissent donc une force de Coriolis de norme $|-2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}'| = 2m\omega v'$, où $\vec{v}'$ est la vitesse relative d'un bras. Les forces de Coriolis sur chacun des bras ont des sens opposés, créant ainsi un couple de force sur les bras qui met le tabouret en rotation relativement au carrousel avec une vitesse angulaire orientée vers le bas. La personne fixe sur le carrousel voit donc son amie se mettre en rotation par rapport à elle.
On arrive bien sûr au même résultat en considérant le système de la personne sur le tabouret vu d'un référentiel d'inertie, extérieur au carrousel. La personne sur le tabouret tournant est isolée selon la direction verticale en ce qui concerne les moments externes. En conséquence, la composante verticale du moment cinétique du système de la personne sur le tabouret est une constante. Quand la personne écarte les bras, son moment d'inertie autour de l'axe vertical augmente, et donc sa vitesse angulaire diminue par conservation du moment cinétique. Vu d'un observateur dans le référentiel d'inertie, la vitesse angulaire de la personne sur le tabouret diminue. Par conséquent, la personne fixe sur le carrousel voit son amie se mettre à tourner par rapport à elle.

1 Le manège à plancher rétractable

a) Le manège est en rotation, le référentiel associé n'est donc pas d'inertie (galiléen). Si $(Oxyz)$ est le repère associé au référentiel de l'observateur hors manège, on nomme $(Ox'y'z)$ le repère tournant associé au manège, avec l'axe Ox' partant du centre du manège et passant par (le centre de gravité de) la personne et Oy' tel que le repère soit direct (on rappelle que $z = z'$). Les forces s'appliquant sur la personne sont :



- son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{e}_z = -mg\hat{e}_{z'}$
- la force de liaison de la paroi, $\vec{N} = N_x\hat{e}_{x'}$
- la force de frottement statique avec la paroi $\vec{T} = T_z\hat{e}_{z'}$
- la force centrifuge $\vec{f}_{\text{cent.}} = -m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OG}) = mR\omega^2\hat{e}_{x'}$
- les autres forces d'inertie sont nulles.

Pour que l'équilibre ait lieu, la somme de ces forces doit être nulle. Il en ressort que la force de réaction de la paroi doit compenser la force centrifuge, $N_x = -mR\omega^2$, et que la force de frottement statique doit compenser le poids, $T_z = mg$. On voit donc en particulier qu'on ne peut s'affranchir du frottement statique dans la description du problème.

b) On sait d'après les lois de Coulomb sur le frottement statique que la condition de non glissement de la personne le long de la paroi est $|T_z| \leq \mu|N_x|$. En utilisant les conditions d'équilibre de la question a), on en déduit que :

$$\omega^2 \geq \frac{g}{\mu R}, \tag{1}$$

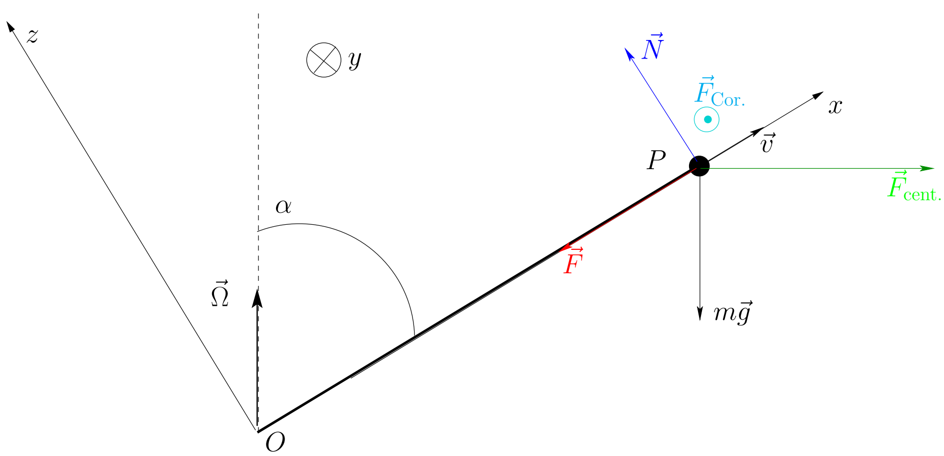
c'est à dire

$$\omega \geq \omega_{\min} \quad \text{avec} \quad \omega_{\min} = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\mu \mathrm{R}}}. \tag{2}$$

2 Point matériel dans un référentiel tournant

On choisit un référentiel $Oxyz$ tournant avec la tige, et le repère associé $O\hat{e}_x\hat{e}_y\hat{e}_z$ (voir dessin). Le vecteur $\hat{e}_x$ est dans la direction de la tige, avec origine le point O, et $\hat{e}_z$ est dans le plan vertical contenant la tige. La tige tourne avec une vitesse angulaire Ω verticale, donc

$$\vec{\Omega} = \Omega\cos\alpha\hat{e}_x + \Omega\sin\alpha\hat{e}_z\,. \tag{3}$$



a) Dans le référentiel lié à la tige, les forces exercées sur le point P sont :
   - le poids $m\vec{g} = -mg\cos\alpha\hat{e}_x - mg\sin\alpha\hat{e}_z$,
   - la force de rappel du ressort, dirigée le long de la tige, $\vec{F} = -k(x - l_0)\hat{e}_x$,
   - la force de liaison de P sur la tige, perpendiculaire à la tige, $\vec{N} = N_y\hat{e}_y + N_z\hat{e}_z$ (dans le dessin ci-dessous, le vecteur $\vec{N}$ n'est pas dans le plan de la feuille, en fait la composante N_y compense la force de Coriolis),
   - la force de Coriolis

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v} = -2m\begin{pmatrix}\Omega\cos\alpha\\0\\\Omega\sin\alpha\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\dot{x}\\0\\0\end{pmatrix} = -2m\begin{pmatrix}0\\\Omega\sin\alpha\dot{x}\\0\end{pmatrix},$$

   qui n'a pas de composante selon $\hat{e}_x$,
   - et la force centrifuge,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{Centrifuge}} &= -m\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OP})\\ &= -m\vec{\Omega}\wedge\left(\begin{pmatrix}\Omega\cos\alpha\\0\\\Omega\sin\alpha\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\right) = -m\begin{pmatrix}\Omega\cos\alpha\\0\\\Omega\sin\alpha\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\x\Omega\sin\alpha\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}mx\Omega^2\sin^2\alpha\\0\\-mx\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

— Les autres forces d'inertie sont nulles, car l'origine du référentiel tournant est fixe dans le référentiel d'inertie, et que la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ est constante.

On peut alors écrire l'équation du mouvement dans le référentiel tournant, $\sum \vec{F}^{\text{ext}} + \sum \vec{F}^{\text{inertie}} = m\vec{a}'$, selon $\hat{e}_x$:

$$-\, mg\cos\alpha - k(x - l_0) + mx\Omega^2 \sin^2\alpha = m\ddot{x}\,. \tag{4}$$

qui peut se récrire

$$m\ddot{x} = -(k - m\Omega^2 \sin^2\alpha)x + (kl_0 - mg\cos\alpha)\,. \tag{5}$$

On reconnait l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{k - m\Omega^2 \sin^2\alpha}{m}}\,,$$

pour autant que $k > m\Omega^2 \sin^2\alpha$.

b) À l'équilibre dans le référentiel de la tige, le point matériel a une accélération nulle ($\ddot{x} = 0$). De l'équation du mouvement, on trouve alors la position d'équilibre x_{eq} telle que

$$-\,(k - m\Omega^2 \sin^2\alpha)x_{eq} + (kl_0 - mg\cos\alpha) = 0\,. \tag{6}$$

d'où

$$(k - m\Omega^2 \sin^2\alpha)x_{eq} = kl_0 - mg\cos\alpha\,, \tag{7}$$

et la solution est

$$x_{eq} = \frac{kl_0 - mg\cos\alpha}{k - m\Omega^2 \sin^2\alpha}\,. \tag{8}$$

Les cas limites donnent :

— $k \to \infty \Rightarrow x_{eq} = l_0$, qui correspond à un ressort rigide qui n'est pas affecté par le poids ni la force centrifuge.

— $\Omega = 0 \Rightarrow x_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}\cos\alpha$.

— $\alpha = \pi/2 \Rightarrow x_{eq} = \frac{kl_0}{k - m\Omega^2}$.

3 Pendule dans un référentiel tournant

On choisit un référentiel absolu $Ox_1x_2x_3$ lié à la Terre. Le référentiel relatif $Axyz$ a comme origine le point d'attache du pendule sur le plan qui tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\hat{x}_3$. On exprime la position du pendule dans le référentiel relatif en coordonnées cylindriques dans le repère associé $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z$. Dans ce repère, la vitesse angulaire s'exprime comme $\vec{\omega} = \omega(-\cos\phi\,\hat{e}_\rho + \sin\phi\,\hat{e}_\phi)$.

De plus, l'accélération absolue $\vec{a}_{\text{abs}}$ du point P est donnée par

$$\vec{a}_{\text{abs}}(P) = \vec{a}_{\text{rel}}(P) + \underbrace{\left[2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\text{rel}}(P) + \vec{a}_{\text{abs}}(A) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP}\right]}_{-\frac{1}{m}\Sigma\vec{F}^{\text{inertie}}}\,. \tag{9}$$

a) Les forces extérieures qui s'appliquent sur le point matériel sont :

— son poids $m\vec{g} = mg(\cos\phi\hat{e}_\rho - \sin\phi\hat{e}_\phi)$.

— la tension dans le fil du pendule $\vec{T} = T_\rho\hat{e}_\rho$.

— la force de liason du pendule dans le plan tournant $\vec{N} = N_z\hat{e}_z$.

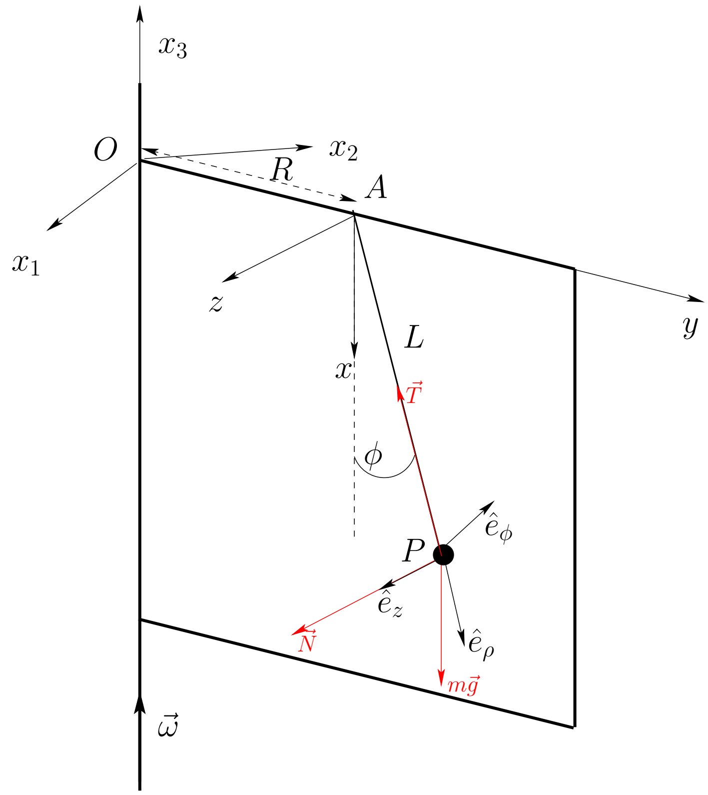
Les forces d'inertie sont les suivantes :

— la force d'entraînement du point A, $-m\vec{a}_{\text{abs}}(A) = m\omega^2R(\sin\phi\hat{e}_\rho + \cos\phi\hat{e}_\phi)$,

— la force de Coriolis, $-2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{\text{rel}}(P) = -2m\omega\hat{x}_3\wedge L\dot{\phi}\hat{e}_\phi = 2m\omega L\dot{\phi}\cos\phi\hat{e}_z$,

— la force centrifuge, $-m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AP}) = m\omega^2L\sin\phi(\sin\phi\hat{e}_\rho + \cos\phi\hat{e}_\phi)$,

— et le terme $-m\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{AP} = 0$, puisque $\dot{\omega} = 0$.



b) Les équations du mouvement du point P seront données par

$$\sum\vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{abs}}(P) \Leftrightarrow \sum\vec{F}^{\text{ext}} + \sum\vec{F}^{\text{inertie}} = m\vec{a}_{\text{rel}}(P)\,, \tag{10}$$

où $\vec{a}_{\text{rel}}(P)$ est l'accélération relative du pendule dans le référentiel tournant.
L'accélération relative du point P est donnée par l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques. En tenant compte du fait que $\rho = L$ et que $z = 0$ sont constants, on trouve

$$\vec{a}_{\text{rel}}(P) = -L\dot{\phi}^2\vec{e}_\rho + L\ddot{\phi}\vec{e}_\phi\,. \tag{11}$$

On en déduit alors les équations du mouvement dans le référentiel tournant :

$$\text{selon } \hat{e}_\rho : mg\cos\phi + T + m\omega^2(L\sin\phi + R)\sin\phi = -mL\dot{\phi}^2, \tag{12}$$

$$\text{selon } \hat{e}_\phi : -mg\sin\phi + m\omega^2(L\sin\phi + R)\cos\phi = mL\ddot{\phi}, \tag{13}$$

$$\text{selon } \hat{e}_z : N + 2m\omega L\dot{\phi}\cos\phi = 0\,. \tag{14}$$

Cette dernière équation exprime que la force de liaison $\vec{N}$ s'oppose à la force de Coriolis, de sorte que le pendule ne sorte pas du plan sous l'effet de la force de Coriolis.