## 8.7 Intégration de développements limités

**Thm:** Soit $f \in C^n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et le DL suivant :

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \cdot \varepsilon_1(x)$$

où $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$. Alors

$$\int_a^x f(t)\,dt = f(a)\cdot(x-a) + \frac{f'(a)}{2}\cdot(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+1}\cdot\varepsilon_2(x)$$

où $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$.

**Preuve:** Il suffit d'intégrer terme à terme. Vérifions la forme du terme de reste :

$$R(x) = \int_a^x (t-a)^n \varepsilon_1(t)\,dt$$

$$= (x-a)\cdot(u_x - a)^n \varepsilon_1(u_x) \quad \text{pour un certain } u_x \in ]a, x[ \text{ par le Thm. de la moyenne}$$

$$= (x-a)^{n+1} \cdot \underbrace{\left(\frac{u_x - a}{x-a}\right)^n \varepsilon_1(u_x)}_{\varepsilon_2(x)} \quad : \text{ on a } |\varepsilon_2(x)| \leq \left|\frac{u_x - a}{x-a}\right|^n |\varepsilon_1(u_x)| \leq |\varepsilon_1(u_x)|$$

Donc $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, ce qui montre la forme du reste. ∎

**Exemple:** Soit $F(x) = \int_0^x \sin(\cos(t))\,dt$. Calculer le $DL_5$ de $F$ en $0$.
On a besoin du $DL_4$ de $\sin(\cos(t))$ en $0$.

(i) $\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + t^4\varepsilon(t) \qquad (\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0)$

$DL_2$ de $\sin$ en $1 = \lim\limits_{t\to 0} \cos(t)$ :

(ii) $\sin(u) = \sin(1) + \cos(1)\cdot(u-1) - \frac{\sin(1)}{2}\cdot(u-1)^2 + (u-1)^2\varepsilon(u) \qquad (\varepsilon(u) \xrightarrow[u\to 1]{} 0)$

formule de Taylor

(iii) $f(t) = \sin(\cos(t)) = \sin(1) + \cos(1)\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + t^4\varepsilon(t)\right) - \frac{1}{2}\sin(1)\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + t^4\varepsilon(t)\right)^2 + t^4\varepsilon(t) \qquad (\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0)$

$$f(t) = \sin(1) - \frac{\cos(1)}{2} t^2 + \left( \frac{\cos(1)}{24} - \frac{\sin(1)}{8} \right) t^4 + t^4 \varepsilon(t)$$

(iv) On applique le Thm. ci-dessus :

- $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sin(1) \cdot x - \frac{\cos(1)}{6} x^3 + \left( \frac{\cos(1)}{120} - \frac{\sin(1)}{40} \right) x^5 + x^5 \varepsilon(x)$

$$\left( \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \right)$$

## 8.8 Intégration des séries entières

**Thm** : Une série entière peut s'intégrer terme à terme et le rayon de convergence de la série obtenue est le même que celui de la série d'origine.

Exemples :

① Soit $I$ un intervalle ouvert contenant $0$ et $f \in C^\infty(I)$.

Série de Taylor de $f$ en $0$ (aussi appelée série de McLaurin) :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Si $S$ a pour rayon de convergence $R$, alors pour $x \in ]-R, R[$, on a

$$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} \quad \left( = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \int_0^x t^k\,dt \right)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{f^{(\ell-1)}(0)}{\ell!} x^\ell$$ : on reconnaît la série de Taylor associée à $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ car $F^{(\ell)}(x) = f^{(\ell-1)}(x)$

② Soit $f(x) = e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!}$ ← dev. en série entière de exp

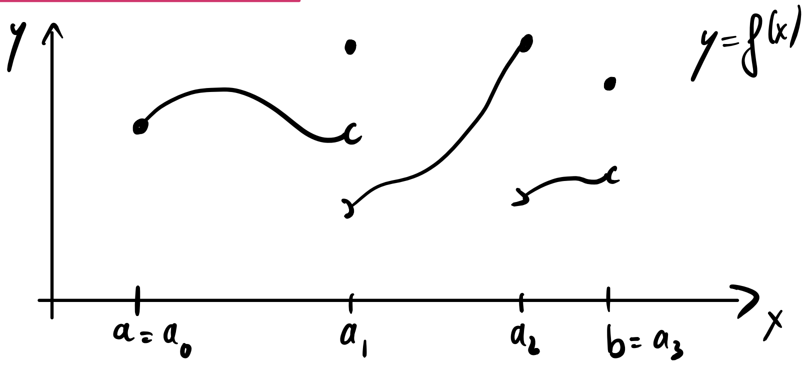
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \qquad (R = +\infty)$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+1} \cdot x^{2k+1} \qquad (R = +\infty)$$

## 8.9 Intégration des fonctions continues par morceaux

**Def:** Une fonction continue par morceaux est une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que il existe une subdivision $\sigma = \{\underset{= a}{a_0}, a_1, \dots, \underset{= b}{a_n}\}$ et $n$ fonctions $f_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{R}$ continues, telles que

$$f(x) = f_i(x) \qquad \forall x \in ]a_i, a_{i+1}[, \; i \in \{0, \dots, n-1\}$$




**Def:** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)\,dt$$

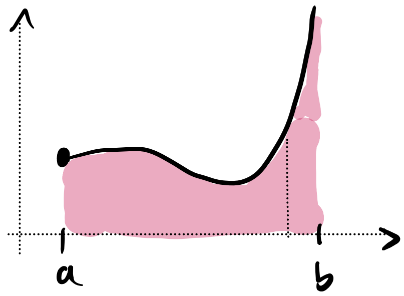
Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 4 \end{cases} \qquad \left( \begin{array}{l} \text{ici } f_0(x) = 3 \text{ pour } x \in [0,1] \\ \phantom{\text{ici }} f_1(x) = 2 \text{ pour } x \in [1,4] \end{array} \right)$$

$$\int_0^4 f(t)\,dt = \int_0^1 3\,dt + \int_1^4 2\,dt = 3 + 2\cdot(4-1) = 9.$$

# Chapitre 9 : Intégrales généralisées (ou impropres)

## 8.1 Type 1 : $f$ est continue sur $[a,b[$ $\quad (a, b \in \mathbb{R},\ a<b)$




→ On définit $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(t)\,dt$ si la limite existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

- On peut aussi écrire $\int_a^{b^-} f(t)\,dt$ pour souligner que l'intégrale est impropre en $b$.
- Si la limite est réelle ($\in \mathbb{R}$) on dit que l'intégrale converge.
- Si la limite n'existe pas, on dit que la fonction n'est pas intégrable.

→ Si $f$ continue sur $]a,b]$ alors $\int_{a^+}^b f(t)\,dt = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(t)\,dt$.

→ Si $f$ continue sur $]a,b[$ alors on choisit $c \in ]a,b[$ quelconque

$$\int_{a^+}^{b^-} f(t)\,dt = \int_{a^+}^{c} f(t)\,dt + \int_c^{b^-} f(t)\,dt$$ ssi les 2 intégrales existent.

Exemples :

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ $\begin{cases} \text{si } \alpha \leqslant 0, & f \text{ est continue sur } [0,1] \text{ (intégrable au sens classique)} \\ \text{si } \alpha > 0, & f \text{ est continue sur } ]0,1] \end{cases}$

• Si $r \neq 1$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^r} = \lim_{\alpha \to 0+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x^r} = \lim_{\alpha \to 0+} \int_\alpha^1 x^{-r}\, dx$$

$$(x^{1-r})' = (1-r) \cdot x^{1-r-1} = (1-r) \cdot x^{-r}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left[ \frac{1}{1-r} x^{1-r} \right]_\alpha^1$$

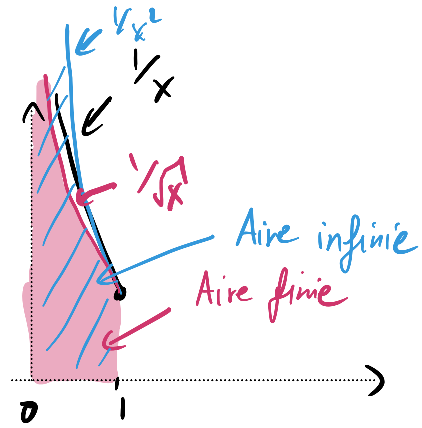
$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left( \frac{1}{1-r} - \frac{\alpha^{1-r}}{1-r} \right) = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{si } 1-r > 0 \Leftrightarrow r < 1 \\ +\infty & \text{si } 1-r < 0 \Leftrightarrow r > 1 \end{cases}$$

• Si $r = 1$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \to 0+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left[ \log(x) \right]_\alpha^1$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left( 0 - \log(\alpha) \right) = +\infty$$




2) Calculer l'intégrale : $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$

⚠ Fausse piste : $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \left[ \frac{1}{-3} x^{-3} \right]_{-1}^1 = \frac{-1}{3} - \left( \frac{1}{3} \right) = \frac{-2}{3}$ Faux !

→ La fonction n'est continue sur $[-1, 1]$ donc on ne peut appliquer le Thm. fondamental du calcul intégral.

En fait : $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \int_{-1}^{0-} \frac{dx}{x^4} + \int_{0+}^1 \frac{dx}{x^4} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{x^4} = +\infty$