Prof. L. Chizat
Analyse I - XYZ
17 janvier 2022
3 heures

1

Lennon John

SCIPER : **XXXXX1**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages (les dernières pouvant être vides), et 31 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Correction

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1-} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

- ■ diverge
- ☐ converge et vaut 0
- ☐ converge et vaut -1
- ☐ converge et vaut 1

Question 2 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \sin(x)$, et soit $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa fonction réciproque. Alors au point $y_0 = f(\pi)$:

- ☐ $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = -\dfrac{1}{3}$
- ■ $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = 1$
- ☐ $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{2\pi - 1}$
- ☐ f^{-1} n'est pas dérivable

Question 3 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $a_n = \dfrac{(-2)^n (n!)^2}{(2n)!}$. Alors la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est:

- ☐ convergente mais pas absolument convergente
- ☐ divergente car $|a_n| \to +\infty$
- ■ absolument convergente
- ☐ divergente car $|a_n| \to 1$

Question 4 : La série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+4}}(x+1)^n$ converge si et seulement si $x \in I$, où:

- ■ $I = \left]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right[$
- ☐ $I = \left[-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right]$
- ☐ $I = \left]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- ☐ $I = \left]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$

Question 5 : Soit $I = [-3, 0]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 3\mathrm{e}^{\frac{x+3}{3}} - 2$. Alors pour tout $x, y \in I$ tels que $x < y$ on a:

- ■ $1 \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3$
- ☐ $-\infty < \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$
- ☐ $3 \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3\mathrm{e}$
- ☐ $2 \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \mathrm{e}$

Correction

Question 6 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f\colon\ [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2-10x-15}{x^2-x-6} & \text{si } x > 3\,, \\ a & \text{si } x = 3\,, \\ bx^2+1 & \text{si } 0 \le x < 3\,. \end{cases}$$

Alors f est continue sur $[0,+\infty[$ pour:

□ $a=5,\ b=\frac{4}{9}$ □ $a=0,\ b=-\frac{1}{9}$ □ $a=4,\ b=3$ ■ $a=4,\ b=\frac{1}{3}$

Question 7 : L'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\,(x^2+3)}\,\mathrm{d}x$ vaut:

□ $\frac{1}{3}\,\mathrm{Log}(2) - \frac{1}{9}\,\mathrm{Log}\left(\frac{7}{4}\right)$ □ $\mathrm{Log}(2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctg}(2)$

□ $\mathrm{Log}(4) + \mathrm{Log}\left(\frac{7}{2}\right)$ ■ $\frac{1}{3}\,\mathrm{Log}(2) - \frac{1}{6}\,\mathrm{Log}\left(\frac{7}{4}\right)$

Question 8 : Soit $f\colon\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^x\cos(x)$. Alors l'ensemble image de f est égal à

□ $[0,1]$ □ $\left]0, \exp\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$ □ $]0,1]$ ■ $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Question 9 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{x\sin(x)}{\sqrt{x^2+1}-1}\,.$$

Alors:

■ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = 2$ □ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty$

□ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{1}{2}$ □ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = 0$

Question 10 : Soit $z = \dfrac{2\,\mathrm{i}^9 - 4\,\mathrm{i}^{15}}{1-\mathrm{i}}$. Alors:

□ $z^6 = -8\cdot 3^6\,\mathrm{i}$ ■ $z^6 = 8\cdot 3^6\,\mathrm{i}$ □ $z^6 = 8\cdot 3^6$ □ $z^6 = 8\cdot 3^6(1+\mathrm{i})$

Question 11 : Soit $(a_n)_{n\ge 1}$ la suite définie par $a_n = \mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{n^2\,\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Alors:

□ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathrm{e}$ ■ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

□ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ □ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Question 12 : Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x)$ le développement limité d'ordre trois de la fonction $f(x) = e^{\sin(x)}$ autour de $x_0 = 0$. Alors a_3 est égal à:

□ 1 ■ 0 □ $\dfrac{1}{2}$ □ $\dfrac{1}{6}$

Question 13 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}\,.$$

Alors :

- ☐ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
- ☐ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ■ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

Question 14 : Soit $f\colon\ ]-1,1[\ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \sum_{n=2}^{\infty} t^n$. Alors:

- ☐ $f'(\frac{1}{2}) = 0$
- ☐ $f'(\frac{1}{2}) = -5$
- ■ $f'(\frac{1}{2}) = 3$
- ☐ $f'(\frac{1}{2}) = 7$

Question 15 : Le développement limité d'ordre deux de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$ autour de $x_0 = 0$ est:

- ☐ $f(x) = \mathrm{e} + \mathrm{e}\,x + 3\mathrm{e}\,x^2 + x^2\varepsilon(x)$
- ■ $f(x) = \mathrm{e} + \mathrm{e}\,x + \frac{3}{2}\mathrm{e}\,x^2 + x^2\varepsilon(x)$
- ☐ $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$
- ☐ $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)$

Question 16 : L'intégrale $\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{\sin(x)} \cos(x)\,\mathrm{d}x$ vaut:

- ☐ e
- ☐ 0
- ☐ 1
- ■ $\mathrm{e} - 1$

Question 17 : Soit $A = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } y = e^{-x}\}$. Alors

- ■ $\operatorname{Sup} A = 1$
- ☐ A n'est pas majoré
- ☐ $\operatorname{Sup} A = \mathrm{e}$
- ☐ $\operatorname{Inf} A = 1$

Question 18 : Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 3$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + 2$. Alors:

- ■ $\lim_{n\to+\infty} x_n = 8$
- ☐ $(x_n)_{n\geq 0}$ diverge
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} x_n = 2$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} x_n = 3$

Correction

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Il existe une fonction bijective et continue $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$.

■ VRAI □ FAUX

Question 20 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide, et soit $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Si A est majoré, alors B est majoré.

□ VRAI ■ FAUX

Question 21 : Si la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-3)^k$ converge pour $x = 2.8$, alors elle converge aussi pour $x = 3.1$.

■ VRAI □ FAUX

Question 22 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

□ VRAI ■ FAUX

Question 23 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.

□ VRAI ■ FAUX

Question 24 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable, $n \in \mathbb{N}^*$, et $f(x) = p_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ le développement limité de f d'ordre n autour de zéro, où $p_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ est un polynôme. Alors

$$f'(0) = p'(0)\,, \quad f^{(2)}(0) = p_n^{(2)}(0)\,, \quad f^{(3)}(0) = p_n^{(3)}(0)\,, \quad \dots \quad , \quad f^{(n)}(0) = p_n^{(n)}(0)$$

■ VRAI □ FAUX

Question 25 : Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = -\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

☐ VRAI ■ FAUX

Question 26 : Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(-1) = f(1)$. Alors il existe $x_0 \in \,]-1, 1[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 27 : Il existe une fonction continue $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 28 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy.

■ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ■ 5 *Réservé au correcteur*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ des suites réelles et $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Donner la définition de $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

(b) Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = a + b$.

Correction

Question 30: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7 *Réservé au correcteur*

(a) Soit $a < b$ et $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]a,b[$. Supposons que $c \in]a,b[$ soit tel que f admet un maximum global en c.

(i) Rappeler la définition de la dérivée à droite de f en c, que l'on notera $f'_d(c)$.

(ii) En partant de cette définition, montrer que $f'_d(c) \leq 0$.

(iii) Montrer que $f'_g(c) \geq 0$, où $f'_g(c)$ est la dérivée à gauche de f en c.

(iv) En déduire, en justifiant, que $f'(c) = 0$.

(b) Donner, sans justifier, un exemple de fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que f admet un point stationnaire en x, mais x n'est pas un extremum local de f. (Donner f par une expression mathématique, les dessins ne seront pas acceptés).

Correction

Question 31: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ■ 4 *Réservé au correcteur*

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n!}.$$

Montrer que la suite (a_n) est bornée.
Indication : On pourra utiliser que pour $n \geq 2$,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k).$$

Correction