Open part correction

Lénaïc Chizat

February 7, 2022

1 Question 29 (5pts)

(a) 2 points.

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geq n_0, |u_n - a| < \epsilon$ (on peut aussi mettre $|u_n - a| \leq \epsilon$, qui donne une définition équivalente).

(b) 3 points.

Soit $\epsilon > 0$. Sous nos hypothèses,

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|u_n - a| < \epsilon/2$
- $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1$, $|v_n - b| < \epsilon/2$

Ainsi, pour $n \geq n_2 := \max\{n_0, n_1\}$, on a

$$|(u_n + v_n) - (a + b)| \leq |u_n - a| + |v_n - b| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

On obtient donc que $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2$, $|(u_n + v_n) - (a + b)| < \epsilon$. (Donc $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = a + b$.)

2 Question 30 (7 pts)

2.1 (a) 5 points (2+1+1+1)

(i) (2pt) $f'_d(c) := \lim_{x\to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ si la limite existe. (Aussi accepté: $f'_d(c) := \lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$).

(ii) (1pt) Puisque c est un maximum de f on a $\forall x \in]a, b[$, $f(c) - f(x) \geq 0$. Donc pour tout $x > c$ on a

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

car c'est le ratio d'une quantité négative et une quantité positive. Ainsi, à la limite $x \to c+$ on a $f'_d(c) \leq 0$.

(iii) (1pt) De façon similaire, pour tout $x < c$ on a $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$, car c'est le ratio de deux quantités négatives. Ainsi, à la limite $x \to c-$ on a $f'_g(c) \geq 0$.

(iv) (1pt) Comme f est différentiable/dérivable en c, on a $f'(c) = f'_d(c) = f'_g(c)$. Donc $0 \leq f'(c) \leq 0$ et donc $f'(c) = 0$.

2.2 (b) 2 points

Un exemple de solution est $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ et le point $x = 0$.

3 Question 31 (4 pts)

Par l'inégalité triangulaire appliquée à l'équation en "indication", pour $n \geq 2$ on a

$$|a_n| \leq |a_1| + \left|\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\right| \leq |a_1| + \sum_{k=1}^{n-1}|a_{k+1} - a_k| \leq \underbrace{|a_1| + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}}_{b_n}$$

Puisque* l'on sait que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!} = e$ (série de Taylor de la fonction exponentielle exp), il s'ensuit que $\lim_{n\to\infty} b_n = |a_1| + e$. Comme la suite (b_n) converge, elle est bornée. Cela implique que la suite $(|a_n|)$ est bornée et donc (a_n) est bornée.

**Conclusion alternative:* $|a_1| + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!} \leq |a_1| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!} = |a_1| + e$, donc (a_n) est bornée.