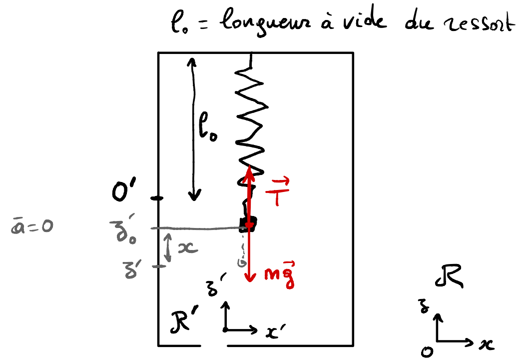
Référentiels accélérés — suite

Ex1 : Ressort et masse dans ascenseur



Système : masse ponctuelle m

Référentiel : $\mathcal{R}$ fixe, $\mathcal{R}'$ accéléré p/r à $\mathcal{R}$

repère $O'x'y'z'$ fixe dans $\mathcal{R}'$

Force dans $\mathcal{R}'$:

- forces externes : poids $m\vec{g} = -mg\,\hat{e}_{z'}$
  ressort $\vec{T} = T\,\hat{e}_{z'} = -k\,z'\,\hat{e}_{z'}$

- forces inertielles : $\vec{F}^{(c)} = -m\,2\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}' = \vec{0}$ car $\vec{\omega} = \vec{0}$
  $\vec{F}^{(e)} = -m\,\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = -m\,\bar{a}\,\hat{e}_{z'}$

Equation du mouvement dans $\mathcal{R}'$, selon $\hat{e}_{z'}$: $\boxed{m\ddot{z}' = -m\underbrace{(g+\bar{a})}_{g\to g+\bar{a}} - k z'}$

Equilibre : $\ddot{z}' = 0 \rightarrow z'_{eq} = -\dfrac{m(g+\bar{a})}{k} = z'_0 - \dfrac{m\bar{a}}{k}$ où $\boxed{z'_0 = -\dfrac{mg}{k}}$

(equil. au repos)

Deuxième partie :
- boîte remplie de liquide → frottement visqueux (fluide)
- accélération périodique → $\bar{a}(t) = a_e \cos\omega_e t$

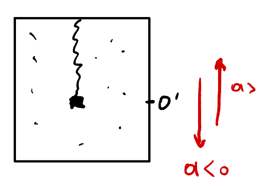
Nouvelle force de frottement fluide : $\vec{F} = -b\,\vec{v}'$

Posons : $\boxed{x = z' - z'_0} = z' + \dfrac{mg}{k} \longrightarrow z' = x - \dfrac{mg}{k}$ $\quad \dot{z}' = \dot{x}\,,\ \ddot{z}' = \ddot{x}$

Eq. du mvt : $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} - m\overbrace{a_e\cos(\omega_e t)}^{\vec{a}_{O'/\mathcal{R}}}$

Oscillateur harm. amorti et forcé

$$\boxed{\ddot{x} + \underbrace{\frac{b}{m}}_{2\gamma}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}x = -a_e\cos(\omega_e t)}$$



* $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsation propre

* $\gamma = \frac{b}{2m}$ coefficient d'amortissement

* Terme de forçage : $- a_e \cos \omega_e t$ (Imposé par l'extérieur)

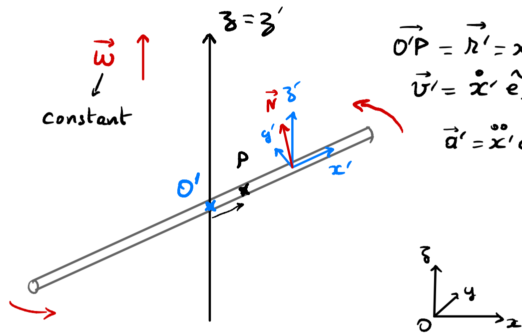
↳ il existe une fréquence de résonance $\boxed{\omega_{rés} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}$

Lorsque $\omega_e \approx \omega_{rés.}$ → phénomène de résonance

→ oscillations de grande amplitude

$$|\omega_e - \omega_{rés}| < \gamma$$

Ex 2 : tube tournant



$\vec{O'P} = \vec{r}' = x' \hat{e}_x'$

$\vec{v}' = \dot{x}' \hat{e}_x'$

$\vec{a}' = \ddot{x}' \hat{e}_x'$

Qu : • Décrire le mvt du point matériel P

• Calculer les forces de liaison

Système : point matériel de masse m

Deux choix de référentiel :

a) $\mathcal{R}$ fixe

* b) $\mathcal{R}'$ en rotation $\vec{\omega}$ dans $\mathcal{R}$

Contraintes ? $y' = 0$ et $z' = 0$

↳ 2 composantes de force de liaison : $\vec{N} = N_y \hat{e}_y' + N_z \hat{e}_z'$

Forces externes : $\vec{N}$, $-mg\hat{e}_z'$

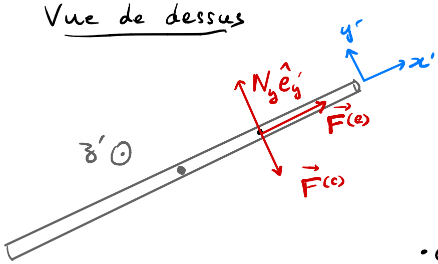
Forces inertielles : $\vec{F}^{(c)} = -m\, 2\, \vec{\omega} \wedge \vec{v}' = -2m\, \omega \hat{e}_z' \wedge \dot{x}' \hat{e}_x' = \boxed{-2m\omega \dot{x}' \hat{e}_y'}$

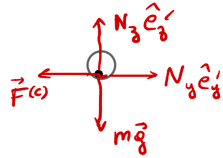
$\vec{F}^{(e)} = -m\, \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$ car $\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{0}$ et $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$

$= -m\, \omega \hat{e}_z' \wedge (\omega \hat{e}_z' \wedge x' \hat{e}_x')$

$= -m\omega^2 x'\, \hat{e}_z' \wedge \hat{e}_y' = \boxed{m\omega^2 x' \hat{e}_x'}$

Vue de dessus





2ème loi de Newton :

$$\ddot{x}' - \omega^2 x' = 0$$

$$\cdot\, \hat{e}_x' : \quad m\ddot{x}' = m\omega^2 x' \quad \Rightarrow \boxed{\ddot{x}' = \omega^2 x'} \ (1)$$

$$\cdot\, \hat{e}_y' : \quad 0 = N_y - 2m\omega\dot{x}' \qquad N_y = 2m\omega\dot{x}'$$

$$\cdot\, \hat{e}_z' : \quad 0 = N_z - mg \qquad N_z = mg$$

Solutions de (1)

fonction test : $x'(t) = A e^{\lambda t} \rightarrow \dot{x}' = \lambda A e^{\lambda t} \rightarrow \ddot{x}' = \lambda^2 A e^{\lambda t} = \lambda^2 x'(t)$

marche aussi pour $B e^{-\lambda t}$

Solution générale : $x'(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$

Conditions initiales : $x'(0) = x_0' = A + B$

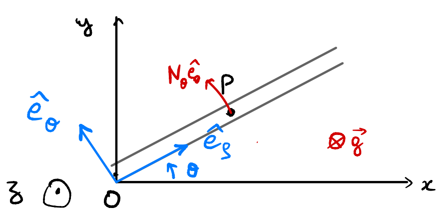
$v'(0) = 0 = \omega(A - B) \Rightarrow A = B$

$A = B = \frac{x_0'}{2}$

Solution finale : $x'(t) = x_0' \dfrac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} = \boxed{x_0' \cosh(\omega t)}$

Force de liaison : $N_y = 2m\omega\dot{x}' = 2m\omega^2 x_0' \sinh(\omega t) = \boxed{m\omega^2 x_0' \left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)}$

a) Résolution dans $\mathcal{R}$ fixe

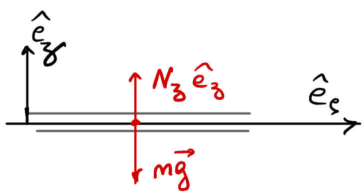


$$\vec{r} = \rho\, \hat{e}_\rho$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\, \hat{e}_\rho + \rho\omega\, \hat{e}_\theta$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\rho}\, \hat{e}_\rho + \dot{\rho}\omega\, \hat{e}_\theta + \dot{\rho}\omega\, \hat{e}_\theta + \rho\omega^2(-\hat{e}_\rho)$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\, \hat{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\, \hat{e}_\theta$$



Newton :

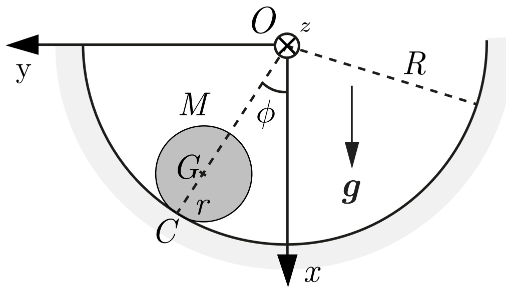
$$\cdot\, \hat{e}_\rho \longrightarrow m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} = \omega^2 \rho$$

$$\cdot\, \hat{e}_\theta \longrightarrow m 2\dot{\rho}\omega = N_\theta$$

4 Cylindre dans un cylindre (12 points)

Enoncé



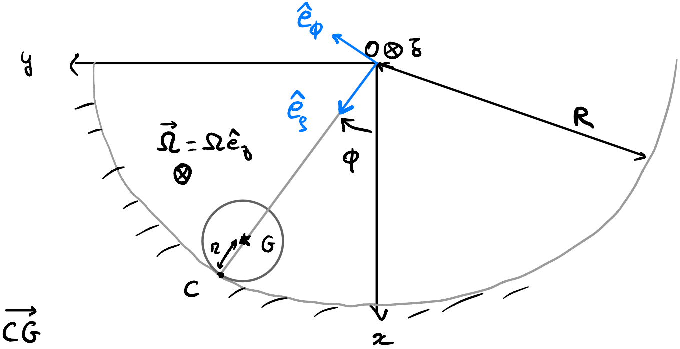
Un cylindre homogène de masse M et de rayon r roule à l'intérieur d'une cavité cylindrique de rayon R, centrée à l'origine O. L'axe de symétrie du cylindre qui passe par son centre de masse G est un axe horizontal et le moment d'inertie du cylindre par rapport à cet axe est $I_G = \frac{1}{2}Mr^2$.

a) On suppose que le roulement s'effectue sans glissement. Donner une relation entre la vitesse de rotation du cylindre autour de son axe, Ω, et l'angle ϕ. **(4 pts)**

b) Écrire une équation différentielle pour ϕ en fonction des données du problème. **(4 pts)**

c) On suppose maintenant que le frottement entre le cylindre et la cavité est caractérisé par un coefficient de frottement statique μ_s. Calculer la valeur maximale que peut prendre l'angle ϕ pour le que le cylindre roule sans glisser. **(4 pts)**

Cylindre dans un cylindre



Système : cylindre homogène masse M
rayon r

Référentiel : lié au support → inertiel

a) Dans un solide : $\vec{v}_G = \vec{v}_C + \vec{\Omega} \wedge \vec{CG}$

or $\vec{v}_C = \vec{0}$ car le cylindre roule sans glisser

d'où : $\vec{v}_G = \vec{\Omega} \wedge \vec{CG}$

On choisit un système de coordonnées cylindrique $O\hat{e}_\rho \hat{e}_\phi \hat{e}_z$ (voir dessin)

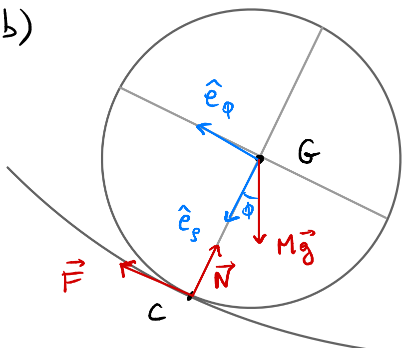
Ainsi $\vec{v}_G = \Omega \hat{e}_z \wedge (-r\hat{e}_\rho) = -r\Omega \hat{e}_\phi$ (1 pt)

D'autre part ; on peut calculer directement l'expression de $\vec{v}_G$:

$\vec{OG} = (R-r)\hat{e}_\rho \longrightarrow \vec{v}_G = (R-r)\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$ car $R-r$ est constant (2 pt)

Donc $-r\Omega = (R-r)\dot{\phi} \iff \boxed{\Omega = \frac{r-R}{r}\dot{\phi} = \left(1-\frac{R}{r}\right)\dot{\phi}}$ (1 pt)

b)



Sur le dessin $N < 0$

Bilan des forces (1 pt)

- Pesanteur $M\vec{g}$ appliquée en G
- Force de liaison $\vec{N}$ appliquée en C
  $\vec{N} = N\hat{e}_\rho$
- Force de frottement statique $\vec{F} = F_\phi \hat{e}_\phi + F_z \hat{e}_z$
  appliquée en C.

(Remarque : comme $\vec{v}_C = \vec{0}$, $\vec{N}\cdot\vec{v}_C = \vec{F}\cdot\vec{v}_C = \vec{0}$
↳ $\vec{N}$ et $\vec{F}$ ne travaillent pas)

On applique le théorème du moment cinétique au point fixe C ($\vec{v}_C = 0$) :

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{ext}$$

* Calcul de $\vec{L}_c$: $\vec{L}_c = \overleftrightarrow{I}^{(c)} \cdot \vec{\Omega}$ or $\vec{\Omega} \parallel \hat{e}_z$ est un axe principal d'inertie (1 pt)

donc $\vec{L}_c = I_z^{(c)} \vec{\Omega}$ où $I_z^{(c)}$ est le moment d'inertie du cylindre p/r à l'axe $\parallel \hat{e}_z$ qui passe par C

D'après le théorème de Steiner : $I_z^{(c)} = I_z^{(G)} + M r^2 = \frac{3}{2} M r^2$ (1 pt)

d'où $\vec{L}_c = \frac{3}{2} M r^2 \Omega \, \hat{e}_z$

$= \frac{3}{2} M r (r-R) \dot{\phi} \, \hat{e}_z$

* Calcul du moment des forces externes $\vec{M}_c^{ext} = \vec{CG} \wedge M\vec{g}$

$$\vec{M}_c^{ext} = -r \, \hat{e}_g \wedge \left(+ Mg\cos\phi \, \hat{e}_g - Mg\sin\phi \, \hat{e}_\phi \right) = r Mg \sin\phi \, \hat{e}_z \quad (1 \text{ pt})$$

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = \vec{M}_c^{ext} \Rightarrow \frac{3}{2} M r (r-R) \ddot{\phi} = r M g \sin\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} + \frac{2g}{3(R-r)} \sin\phi = 0} \quad (1 \text{ pt})$$

c) La condition de frottement statique (non glissement) est $\frac{|F|}{|N|} \leq \mu_s$ (1pt)

2ème loi de Newton : $\vec{F} + \vec{N} + M\vec{g} = M \vec{a}_G$

or $\vec{a}_G = \frac{d}{dt} \vec{v}_G = \frac{d}{dt} \left[(R-r) \dot{\phi} \, \hat{e}_\phi \right] = (R-r) \frac{d}{dt} \left[\dot{\phi} \, \hat{e}_\phi \right]$

$= (R-r) \left[\ddot{\phi} \, \hat{e}_\phi + \dot{\phi} (-\dot{\phi} \, \hat{e}_g) \right] = (R-r) \ddot{\phi} \, \hat{e}_\phi - (R-r) \dot{\phi}^2 \, \hat{e}_g$

Projection selon $\hat{e}_g$: $N + Mg\cos\phi = -(R-r)\dot{\phi}^2 M = M(r-R)\dot{\phi}^2$

$$\Rightarrow \boxed{N = Mg\left(-\cos\phi + \frac{r-R}{g} \dot{\phi}^2\right)} \quad (1 \text{ pt})$$

Projection selon $\hat{e}_\phi$: $F - Mg\sin\phi = M(R-r)\ddot{\phi}$ or $\ddot{\phi} = -\frac{2g}{3(R-r)} \sin\phi$

$$F = Mg\sin\phi + \frac{-2Mg}{3}\sin\phi = \boxed{\frac{1}{3}Mg\sin\phi} \quad (1pt)$$

Lorsque l'angle ϕ est à un maximum : $\mathring{\phi} = 0$

donc $N = -Mg\cos\phi$

Condition de non-glissement : $\frac{|F|}{|N|} = \frac{\frac{1}{3}Mg\,|\sin\phi|}{Mg\cos\phi} \leqslant \mu_s$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\left|\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\right| \leqslant \mu_s \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{|\tan\phi| \leqslant 3\mu_s} \quad (1pt)$$