Correction Série 11

Décembre 2022

1 Résolution de système linéaire

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$ un parametre. Resoudre le systeme suivant (en fonction de a).

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x & - & y & + & 4z & + & t & = 1 \\ 6x & + & y & - & z & + & 2t & = 5 \\ & & y & + & az & + & 3t & = 2 \end{array}$$

En particulier,

1. Determiner les inconnues libres et les inconnues principales.
2. Donner une base de l'espace des solutions quand $(1,5,2)$ est remplace par $(0,0,0)$, .

Solution:

1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & a & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2=R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & a & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2=R_2/3} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3-R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+3 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1=R_1+R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+3 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Which gives the following system of equation

$$\begin{array}{cccccc} 3x & + & z & + & t & = 2 \\ & & y & - & 3z & = 1 \\ & & (a+3)z & + & 3t & = 1 \end{array}$$

Which can be rewritten as

$$\begin{array}{ccc} x & = & \frac{5+az}{9} \\ y & = & 1+3z \\ t & = & \frac{1-(a+3)z}{3} \end{array}$$

Hence z is the free variable and x, y, t are principal variables. And the solution of the system is: $(\frac{5+az}{9}, 1-3z, z, \frac{1-(a+3)z}{3})$ for any z.
2. Replacing $(1,5,2)$ by $(0,0,0)$, we get the following set of equations

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & + & z & + & t & = 0 \\ & & y & - & 3z & = 0 \\ & & (a+3)z & + & 3t & = 0 \end{array}$$

Then, we have

$$\begin{array}{ccc} x & = & \frac{az}{9} \\ y & = & 3z \\ t & = & \frac{-(a+3)z}{3} \end{array}$$

Let $z = 1$, we obtain $y = 3, t = -\frac{a+3}{3}, x = \frac{a}{9}$.
So the basis is

$$\left(\frac{a}{9},\ 3,\ 1,\ -\frac{a+3}{3}\right)$$

Exercice 2. Soit K un corps quelconque. Resoudre dans K le systeme ci-dessous (d'inconnues x, y, z, t, u):

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2x & + & 4y & + & 3z & + & 11t & - & 10u & = a \\ -x & - & 2y & + & 2z & + & 5t & + & 6u & = b \\ & & & & 4z & + & 12t & - & 2u & = c \\ 3x & + & 6y & - & 2z & - & 3t & + & 5u & = d \end{array}$$

En particulier, (prendre garde que la réponse peut dépendre de la caractéristique du corps K).

1. Donner une condition necessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que le systeme ai au moins une solution.
2. Determiner les inconnues libres et les inconnues principales.
3. Donner quand $a = b = c = d = 0$, une base de l'espace des solutions.

Solution: On met le système sous sa forme echelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 3 & 11 & -10 & a \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 6 & b \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -2 & c \\ 3 & 6 & -2 & -3 & 5 & d \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftrightarrow R_3]{-R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 & -6 & -b \\ 2 & 4 & 3 & 11 & -10 & a \\ 3 & 6 & -2 & -3 & 5 & d \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -2 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 = R_2 - 2R_1]{R_3 = R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 & -6 & -b \\ 0 & 0 & 7 & 21 & 2 & a+2b \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 23 & d+3b \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -2 & c \end{array}\right)$$

On arrive a nottre première disjonction de cas. Si $car(K) = 5$, alors le système devient :

$$\xrightarrow{R_4=R_4-R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & -b \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & a+2b \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 & d+3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d+3b-c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2=R_2/2]{R_1=R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & a/2+b \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 & d+3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d+3b-c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3=4R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & a/2+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2a+b-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d+3b-c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2=R_2-R_3]{R_1=R_1-R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -a-d \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -3a/2-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2a+b-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d+3b-c \end{array}\right)$$

Pour qu'il existe une solution, il faut que $d+3b-c=0$.
Les variables libres sont y, t et les variables principales x, z, u.
Si on fixe $a=b=c=d=0$, on obtient les équations :

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ z+t/2=0 \\ u=0 \end{cases}$$

Et donc en posant $y=n$ et $z=m$, on trouve les vecteurs qui composent la base :

$$n(-2,1,0,0,0)+m(0,0,1,-2,0)$$

$\{(-2,1,0,0,0),(0,0,1,-2,0)\}$ est une base de l'espace des solutions.

Si la caractéristique n'est pas 5, on peut maintenant diviser par 25 :

$$\xrightarrow[R_4=R_4/-25]{R_4=R_4-R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 & -6 & -b \\ 0 & 0 & 7 & 21 & 2 & a+2b \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 23 & d+3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{d+3b-c}{25} \end{array}\right)$$

Maintenant, résolvons dans le cas où $\mathrm{car}(K)=2$. Le système devient :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d+b+c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4=R_4+R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right)$$

On obtient donc : On a donc une solution si $c=1$, $d \neq b$. Les variables libres sont y, t, les variables prinicpales x, z, u et le système n'admet pas de solution quand $a=b=c=d=0$ car en particulier

$b = d$.

Et quand $\mathrm{car}(K) = 7$:

$$\xrightarrow[R_4=R_4/-25]{R_4=R_4-R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 & 1 & 6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & a+2b \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2 & d+3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{d+3b-c}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 & 1 & 6b \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2 & d+3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{d+3b-c}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & a+2b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1=R_1+4R_2]{R_4=R_4-2R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 4b+4d \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2 & d+3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{d+3b-c}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+3d+3c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1=R_1-2R_3]{R_2=(R_2-2R_3)/4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 6b+4c \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & d+3b+6c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2d+6b+5c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+3d+3c \end{array}\right)$$

La condition pour avoir une solution est $a + 3d + 3c = 0$. Les pivots sont x, z, u et les variables libres y, t.
En fixant $a = b = c = d = 0$, on trouve le système :

$$\begin{cases} x + 2y + t = 0 \\ z + 3t = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

qui nous donne, en posant $n = y$, $m = t$ l'expression $n(5, 1, 0, 0, 0) + m(6, 0, 4, 1, 0)$ et la base $\{(5, 1, 0, 0, 0), (6, 0, 4, 1, 0)\}$.

Enfin, dans tous les cas restants, où la caractéristique de K n'est pas $2, 5$ ou 7 :

$$\xrightarrow[R_2=R_2/7]{R_3=R_3/4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 & -6 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{2}{7} & \frac{a+2b}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{23}{4} & \frac{d+3b}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{d+3b-c}{25} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3=28R_3/153]{R_3=R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 & -6 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{2}{7} & \frac{a+2b}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{13b-4a+7d}{153} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{d+3b-c}{25} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4=R_4-R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 & -6 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{2}{7} & \frac{a+2b}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{13b-4a+7d}{153} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{100a+134b-153c-22d}{3825} \end{array}\right)$$

Une solution existe quand
$\frac{100a+134b-153c-22d}{3825} = 0$ or

$$100a + 134b - 153c - 22d = 0$$

Les variables libres sont y, t, et les principales x, z, u.
En prenant $a = b = c = d = 0$, on trouve

$$\begin{array}{ccccccccccc} x & + & 2y & - & 2z & - & 5t & - & 6u & = 0 \\ & & & & 1z & + & 3t & + & 2u/7 & = 0 \\ & & & & & & & & u & = 0 \end{array}$$

qu'on réécrit

$$\begin{array}{ccc} x & = & -t - 2y \\ z & = & -3t \\ u & = & 0 \end{array}$$

en posant $t = 0, y = 1$ and $t = 1, y = 0$ on a la base

$$(-1, 0, -3, 1, 0) \quad , \quad (-2, 1, 0, 0, 0)$$

Exercice 3. On considere la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$$

que l'on voit comme matrice d'une application lineaire $\varphi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ dans les bases canoniques.

1. En utilisant le resultat de l'exercice 5, donner une base de l'image $\varphi(\mathbb{Q}^4)$.
2. En utilisant la reduction des matrices representer l'image $\varphi(\mathbb{Q}^4)$ sous forme cartesienne.
3. Trouver une base de $\ker(\varphi)$.

Solution :

1. On commence par échelonner la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 = \frac{3R_1 - R_3}{2}]{R_2 = 2R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 = \frac{R_3 - R_2}{2}]{R_1 = R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 = R_2 - 2R_3]{R_1 = R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme on sait que les colonnes génèrent l'image, et par l'exercice 5 l'ensemble des colonnes (de la forme échelonnée réduite) avec les échelons forment une base de cet espace, on a que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de l'image.

On voit que l'application est surjective, car l'image est tout $\mathbb{Q}^3$.

2. On cherche la représentation cartésienne de $\mathbb{Q}^3$ dans $\mathbb{Q}^3$, où toutes les variables sont donc libres:

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \\ t = d \end{cases} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Q}$$

3. Par le Théorème noyau-image, on sait que le noyau est de dimension 1 (puisque l'image est de dimension 3). Il suffit donc de trouver un vecteur non-nul du noyau pour en avoir une base.

   On peut facilement résoudre l'équation sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Which gives the solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   On peut vérifier que ce vecteur est bien une base du noyau. En effet, si on applique la méthode de l'exercice 2, en ajoutant une colonne de 0 à droite de la matrice, les opérations que nous avons effectuées sur les lignes n'affectent pas cette colonne, ainsi le noyau de la matrice échelonnée est le même que celui de la matrice originale.

Exercice 4. Soit $V = \mathbb{R}[X]_{\leqslant 3}$ le $\mathbb{R}$-EV des polynomes de degre $\leqslant 3$; une base est donnees par les monomes $\mathscr{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$. On considere l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X]_{\leqslant 3} & \mapsto & \mathbb{R}[X]_{\leqslant 3} \\ P & \mapsto & X^2.P'' - (1+X)P' + P \end{array}.$$

Ici P' et P'' designent les derivees premieres et secondes de P.

1. Ecrire $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$.
2. Resoudre le systeme $\varphi(P) = 0$ et en deduire une base de $\ker(\varphi)$.
3. Donner les equations cartesiennes de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
4. En utilisant l'Exercice 1, donner une base de de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Solution:

1. Pour obtenir $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ ecrivons les images par φ des vecteurs de la base $\mathscr{B}$:

$$\begin{aligned} &\varphi(1) = 1 \\ &\varphi(X) = -1 - X + X = -1 \\ &\varphi(X^2) = 2X^2 - (1+X)(2X) + X^2 = X^2 - 2X \\ &\varphi(X^3) = 6X^3 - (1+X)(3X^2) + X^3 = 4X^3 - 3X^2 \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Posons $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3$ et regardons quand $\varphi(P) = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(P) = 0 &\Leftrightarrow \varphi(\alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi(\alpha) + \varphi(\beta X) + \varphi(\gamma X^2) + \varphi(\delta X^3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha - \beta - 2\gamma X + \gamma X^2 - 3\delta X^2 + 4\delta X^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 1(\alpha - \beta) + X(-2\gamma) + X^2(\gamma - 3\delta) + X^3(4\delta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ -2\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0 \\ \gamma - 3\delta = 0 \\ 4\delta = 0 \Leftrightarrow \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   On obtient donc

$$ker(\varphi) = \{\alpha + \alpha X \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[X]$$

   Qui est engendré par le vecteur (qui forme donc une base, car libre) $1 + X$

3. Pour obtenir les equations cartésiennes de $Im(\varphi)$ on echelelonne et réduit sa matrice avec $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ un vecteur de l'image a droite:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 = R_3 + 4.R_4]{R_4 = \frac{R_4}{4}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 + \frac{3w_3}{4} \\ \frac{w_4}{4} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 = R_4 + 2R_3]{R_2 \leftrightarrow R_3; R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_3 + \frac{3w_4}{4} \\ w_3 + \frac{w_4}{4} \\ w_2 + 2w_3 + \frac{3w_4}{2} \end{pmatrix}$$

   Par la théorie du cours (Corollaire 10.3.) on obtient l'équation cartésienne:

$$w_2 + 2w_3 + \frac{3w_4}{2} = 0$$

4. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ est déjà en forme échelonnée (non réduite) mais la passer en forme échelonnée réduite ne changerait pas les colonnes des échelons, et donc de la manière d'utiliser l'exercice 1(on peut aussi se servir de la question 3). On obtient donc par l'exercice 1 qu'une base de l'image s'obtient en prenant les colonnes 1,3 et 4 de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ i.e :

$$Im(\varphi) = Vect(\{1, -2X + X^2, -3X^2 + 4X^3\})$$

2 Recherche d'une base

Exercice 5. Soit $M \in M_{d' \times d}(K)$. Soit $C_j,\ j \leqslant d$ la j-ieme colonne de M et

$$I = \langle C_1, \cdots, C_d \rangle \subset \mathrm{Col}_d(K)$$

l'espace vectoriel engendre par ces colonnes. Soit R la forme echelonnee reduite de M et $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant d$ ses echelons.

1. Montrer que $\{C_{j_1}, \cdots, C_{j_r}\}$ (les colonnes de la matrice M) forme une base de I. Pour cela on ecrira
$$R = T.M$$
avec T une matrice inversible et on considerera les produits
$$T.C_i,\ i = 1, \ldots, d.$$

Remarque 2.1. Si $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(\varphi)$ pour $\varphi : V \mapsto W$ cet exercice permet de trouver une base de l'image $\varphi(V)$.

Solution: One has

$$R = T.M$$

with T invertible and the columns of R are the products

$$\begin{aligned} \mathrm{Col}_i(R) &= T.C_i \\ C_i &= \mathrm{Col}_i(M) \\ \text{and} \quad C_i &= T^{-1}\mathrm{Col}_i(R) \end{aligned}$$

Since R is reduced, the $\mathrm{Col}_j(R)$ where j is the pivot i.e $\{\mathrm{Col}_j(R) : j \text{ pivot}\}$ is free.
Since T is invertible T^{-1} exists and the $\{\mathrm{C}_j(R) : j\ \mathit{pivot}\}$ is a free family.
Moreover

$$\begin{aligned} Im\ M &= \langle C_i; i \rangle \\ &= \langle T^{-1}\mathrm{Col}_i(R); i \rangle \\ &= \langle T^{-1}\mathrm{Col}_j(R); j\ \mathit{pivot} \rangle \end{aligned}$$

Because R is a reduced matrix, the space generated by columns is generated by the pivot columns and

$$\begin{aligned} \langle C_i \rangle &= T^{-1}\langle \mathrm{Col}_i(R); i \rangle \\ &= T^{-1}\langle \mathrm{Col}_j(R); j\ \mathit{pivot} \rangle \end{aligned}$$

3 Inversion de matrice

Exercice 6. Soit K un corps de caracteristique $\neq 2$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1/2 & -1/2 & -3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Determiner en fonction de car(K) quand cette matrice est inversible.
2. Quand c'est le cas, calculer son inverse.

Solution: Since $car(K) \neq 2$, we have

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2=R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4=2R_4-R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2=R_2-R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3-3R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 18 & 6 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1=R_1+R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 18 & 6 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3+2R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4=R_4+2R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -6 & 8 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1=R_1+R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -6 & 8 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2=2R_2+3R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 8 & -7 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -6 & 8 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2=R_2-2R_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -6 & 5 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -6 & 8 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3-4R_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -6 & 5 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -24 & 21 & -28 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -6 & 8 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3=\frac{1}{2}R_3;R_4=\frac{1}{2}R_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & \frac{5}{2} & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -12 & \frac{21}{2} & -14 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -6 & 8 & 10 \end{array}\right)$$

So, the matrix M is invertible for any $car(K) \neq 2$ and the inverse is:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & \frac{5}{2} & -3 & -4 \\ -12 & \frac{21}{2} & -14 & -18 \\ 7 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Soit $K = \mathbb{C}$, Montrer que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse.

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 1 \\ -1+i & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la reponse tous les nombres complexes present devront etre sous la forme $a+ib,\ a,b \in \mathbb{R}$: par exemple on ecrira $1/2 - i/2$ au lieu de $1/(1+i)$.

solution: Utilisons l'échelonnage de la matrice en parallele de l'identité :

$$\left(\begin{array}{lll|lll} 1+i & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1+i & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 = R_1]{R_1 = R_3} \left(\begin{array}{lll|lll} 0 & 0 & i & 1 & 0 & -1-i \\ 0 & 1 & -i-2 & 0 & 1 & -1-i \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{lll|lll} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i-2 & 0 & 1 & -1-i \\ 0 & 0 & -i & 1 & 0 & -1-i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 = R_2 - R_3} \left(\begin{array}{lll|lll} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 & 0 & -1-i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 = iR_3} \left(\begin{array}{lll|lll} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & -i+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 = R_2 + 2R_3]{R_1 = R_1 - R_3} \left(\begin{array}{lll|ccc} 1 & 0 & 0 & -i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & -1+2i & 1 & 2-2i \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & 1-i \end{array}\right)$$

On a donc obtenu notre matrice inverse de celle de départ.

Exercice 8. Soit K un corps, $\mathbf{b} = (b_0, \cdots, b_{d-1}) \in K^d$ et $X \in K^\times$ un element non-nul. On rappelle qu'on a deja vu la matrice "compagnon"

$$M_{\mathbf{b}} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b_{d-1} \end{pmatrix}$$

qui a la propriete de verifier l'equation polynomiale

$$M_{\mathbf{b}}^d + b_{d-1} M_{\mathbf{b}}^{d-1} + \cdots + b_0.\mathrm{Id}_d = \mathbf{0}_d.$$

On considere maintenant ici la matrice "caracteristique"

$$d(X, M_{\mathbf{b}}) := X.\mathrm{Id}_d - M_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ -1 & X & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & X & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X + b_{d-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $d(X, M_{\mathbf{b}})$ est inversible si et seulement si

$$X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0 \neq 0.$$

   Pour cela on echelonnera-reduira cette matrice par une suite d'operations de type (III) pour la rendre triangulaire superieure.

2. Montrer que ce critere d'inversibilite reste vrai meme si $X = 0$ (on retrouve le fait que $M_{\mathbf{b}}$ est inversible ssi $b_0 \neq 0$.)

3. Dans le cas $d = 3$ calculez l' inverse de $d(X, M_{\mathbf{b}})$ (quand cet inverse existe).

Solution: Since $X \neq 0$, We have:

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ -1 & X & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & X & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X + b_{d-1} \end{pmatrix}$$

$R_2 \leftarrow R_2 + \frac{1}{X}R_1$

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & X & 0 & 0 & b_1 + \frac{b_0}{X} \\ 0 & -1 & X & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X + b_{d-1} \end{pmatrix}$$

$R_3 \leftarrow R_3 + \frac{1}{X}R_2$

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & X & 0 & 0 & b_1 + \frac{b_0}{X} \\ 0 & 0 & X & 0 & b_2 + \frac{b_1}{X} + \frac{b_0}{X^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X + b_{d-1} \end{pmatrix}$$

Similarly following these operations, we finally obtain

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & X & 0 & 0 & b_1 + \frac{b_0}{X} \\ 0 & 0 & X & 0 & b_2 + \frac{b_1}{X} + \frac{b_0}{X^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c.t. \end{pmatrix}$$

Where

$$\begin{aligned} c.t. &= X + b_{d-1} + \frac{1}{X}b_{d-2} + \frac{1}{X^2}b_{d-3} + \ldots + \frac{1}{X^{d-1}}b_0 \\ &= \frac{1}{X^{d-1}}\left(X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \ldots + b_0\right) \end{aligned}$$

Further dilating first $d-1$ rows of the matrix by $\frac{1}{X}$ we obtain

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c.t. \end{pmatrix}$$

$\therefore$ If $X^d + b_{d-1} + X^{d-1} + \ldots + b_0 = 0$, the matrix has rank $d-1$ and therefore it is not invertible.
And If $X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \ldots + b_0 \neq 0$ we can dilate the last row by

$$\left(\frac{X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \ldots + b_0}{X_{d-1}}\right)^{-1}$$

to obtain

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

which is invertible.

4

Exercice 9.

Solution :