Cours Euler: Série 16

le 11 janvier 2023

Exercice 1

NO195 Drôles de manières

Solange, Charly et Jérôme ont effectué l'opération $4^2 \cdot 4^4$, de différentes manières :

Solange	*Charly*	*Jérôme*
$2^4 \cdot 2^8$	4^6	16^3

Pourquoi obtiennent-ils le même résultat ?

NO196 Comment procéder ?

Observe ces égalités parfaitement correctes, puis note les procédures qui te permettront de trouver le résultat de n'importe quel autre calcul du même type.

Addition et soustraction

a) $5^3 + 5^2 = 150$

b) $10^4 - 10^0 = 9999$

c) $3^3 + 3^2 = 36$

d) $4^2 + 4^2 = 32$

e) $7^1 - 7^1 = 0$

f) $2^3 + 2^3 = 2^4$

Multiplication

g) $4^2 \cdot 4^3 = 4^5$

h) $6^3 \cdot 6^3 = 6^6$

i) $1^2 \cdot 1^5 = 1^7$

j) $2^3 \cdot 3^3 = 6^3$

k) $7^1 \cdot 7^1 = 7^2$

l) $10^4 \cdot 10^3 = 10^7$

m) $5^2 \cdot 3^2 = 15^2$

n) $3^3 \cdot 3^2 = 3^5$

Division

o) $3^6 : 3^2 = 3^4$

p) $6^4 : 6^4 = 6^0$

q) $7^4 : 7^2 = 7^2$

r) $10^6 : 10^4 = 10^2$

s) $\frac{5^3}{4^3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$

t) $1^6 : 1^3 = 1^3$

u) $2^5 : 2^3 = 2^2$

v) $10^4 : 10^3 = 10^1$

Elévation à une puissance

w) $(3^2)^3 = 3^6$

x) $(10^2)^5 = 10^{10}$

y) $(6^3)^2 = 6^6$

z) $(5^4)^2 = 5^8$

NO197 Applique-les !

Donne la réponse sous la forme d'une puissance (a^n) chaque fois que c'est possible ; sinon, effectue.

a) $2^2 \cdot 2^5$

b) $4^4 \cdot 4^2$

c) $3^3 + 3^3$

d) $10^0 : 10^0$

e) $10^6 - 10^2$

f) $7^3 - 6^3$

g) $(5^1)^2$

h) $5^2 \cdot 2^2$

i) $2^7 - 2^3$

j) $10^6 : 10^2$

k) 2^{2^3}

l) $2^{(2^3)}$

m) $2^2 + 2^5$

n) $(10^3)^2$

o) $\frac{10^3}{10^6}$

p) $10^3 \cdot 10^2$

q) $\frac{2^2}{3^2}$

r) $3^3 \cdot 4^2$

Exercice 2

NO198 Réglementaire ?

Ces égalités sont-elles correctes ? Corrige celles que tu estimes fausses.

a) $3^6 \cdot 3^4 \overset{?}{=} 3^5 \cdot 3^5$

b) $6^4 \cdot 6^2 \overset{?}{=} 6^2 \cdot 3^5$

c) $5^3 \cdot 5^5 \overset{?}{=} (5^3)^2$

d) $2^2 \cdot 2^2 \overset{?}{=} 4^2$

e) $(6^3)^3 \overset{?}{=} 6^3 \cdot 6^3$

f) $7^3 + 7^4 \overset{?}{=} 7^7$

g) $25^3 \cdot 25^2 \overset{?}{=} 5^{10}$

h) $9^3 : 9 \overset{?}{=} 1^3$

i) $10\,000^5 \overset{?}{=} 10^9$

j) $4^2 + 3^2 \overset{?}{=} 7^2$

Exercice 3

NO206 Trouver la lettre

Remplace les lettres par des nombres pour que chaque égalité soit vraie.

a) $3^3 \cdot 3^x = 243$

b) $x^5 = 1$

c) $5^2 \cdot 5^x = 5^2$

d) $10^7 \cdot 10^x = 10^1$

e) $x^2 \cdot x^3 = 32$

f) $a^y = 16$

g) $4^5 : 4^p = 4^2$

h) $b^3 : b^0 = 216$

i) $2^2 \cdot 2^x = 2^3$

j) $4^5 : 4^3 = 4^k$

k) $(2^x)^6 = 64$

l) $(3^2 \cdot 3^1)^x = 3^6$

m) $(-7)^x = -343$

n) $(-5)^5 : (-5)^5 = x$

Exercice 4

On pourra d'abord regarder les vidéos de théorie sur les puissances entières avant de faire cet exercice.

1. Démontre qu'une puissance paire (positive ou négative) d'un nombre réel est toujours un nombre positif.
2. Démontre que $\frac{1}{x^a} = (\frac{1}{x})^a$. (Montre que $(\frac{1}{x})^a$ est bien l'inverse de x^a en utilisant la définition de l'inverse et la propriété 1 des puissances entières.)
3. Démontre que $(x^a)^b = (x^b)^a$ pour tout nombre réel x non nul et tous entiers relatifs a, b.
4. Calcule $(a-b)^3$ où a et b sont des nombres réels. Justifie chaque étape du calcul en écrivant une égalité par ligne et en justifiant chaque étape.

Exercice 5

Racines (sans calculatrice).
Partie A. Dans chaque liste, trouve lequel des nombres est différent des autres :

(a) $\sqrt{60},\ \sqrt{15}\cdot\sqrt{4},\ 2\sqrt{15},\ 3\sqrt{20},\ \sqrt{12}\cdot\sqrt{5}.$

(b) $\sqrt{27},\ \sqrt{20+7},\ 3\sqrt{3},\ \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3},\ 3\sqrt{9}.$

(c) $\sqrt{441},\ \sqrt{49}\cdot\sqrt{9},\ 7\sqrt{9},\ \sqrt{21}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{7},\ \sqrt{400}+\sqrt{1}.$

(d) $\sqrt{\frac{25}{64}},\ \frac{1}{8}\sqrt{25},\ \frac{5}{8},\ \frac{2{,}5}{6{,}4},\ \frac{5}{\sqrt{64}}.$

Partie B. Extraction de racines. Simplifie chaque expression au maximum. Par exemple $\sqrt{12} = \sqrt{3\cdot 4} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{4} = 2\sqrt{3}$.

(a) $\sqrt{175}$
(b) $\sqrt{300}$
(c) $\sqrt[3]{1080}$
(d) $5\sqrt{252}$
(e) $\sqrt{18}+\sqrt{32}$
(f) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$
(g) $\sqrt[3]{-125}$

Partie C. Extraction de racines. Donne la réponse sans aucun symbole de racine !

(a) $\sqrt{900}$
(b) $\sqrt{0{,}04}$
(c) $\sqrt[3]{1000000}$
(d) $\sqrt{10^6}$
(e) $\sqrt{\frac{4}{9}}$
(f) $\sqrt{0{,}25}$
(g) $\sqrt[3]{-1}$
(h) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{800}$
(i) $\sqrt{17}^2$
(j) $\sqrt{1521}$
(k) $\sqrt{81}+\sqrt{121}$
(l) $\sqrt{12} : \sqrt{3}$

Exercice 6

Les nombres a et b étant réels, énonce les conditions d'existence des expressions suivantes. Par exemple l'expression $\sqrt{-a}$ existe si $a \leq 0$.

1. $\sqrt{ab}$
2. $\sqrt{-ab}$
3. $\sqrt{-a^3b^3}$
4. $\sqrt{\frac{a}{b}}$
5. $\sqrt{\frac{a^3}{b^2}}$
6. $\sqrt{\frac{ab}{b}}$
7. $\sqrt{\frac{-a^2}{b}}$
8. $\sqrt{-a^2b}$

Exercice 7

Besoin de se changer les idées ? Quelle est la somme des chiffres de $10^{2017} - 2017$?

Dans les exercices suivants, l'auteur utilise le mot “radicaux” pour racines.

Exercice 8

9. Simplifie les expressions suivantes en te servant des propriétés des radicaux ($a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}_0^+$, $c \in \mathbb{R}^+$) :

1) $\sqrt{a^2bc^3}$ 3) $\sqrt{a^3b^3c^4}$

2) $\sqrt{\frac{a^5}{b^2}c^3}$ 4) $\sqrt{a^2\frac{a^3b^4}{b^3}c^2}$

10. Simplifie les expressions suivantes après avoir précisé les conditions d'existence et sans changer celles-ci :

a. 1) $\sqrt{a^4b^2}$ 3) $\sqrt{\frac{a^3}{b^4}}$

2) $\sqrt{a^7b^3}$ ★ 4) $\sqrt{a^3b^4}$

Exercice 9

A l'aide des propriétés des racines carrées, rends rationnel le dénominateur des expressions suivantes :

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ 3) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$ 4) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ 5) $\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Fais de même avec les expressions suivantes (on pensera à une identité remarquable !) :

6) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ 7) $\frac{19\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$

Exercice 10

Complète à l'aide des signes $\leqslant$, $<$, $=$, $>$ ou $\geqslant$ les énoncés suivants :

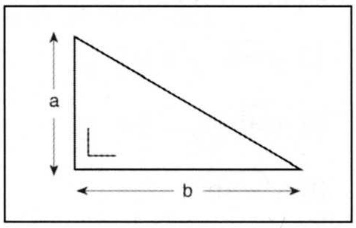
1) $\sqrt{16+9}$ ... $4+3$

2) $\sqrt{25+5}$ ... $5+\sqrt{5}$

3) $\sqrt{8+3}$ ... $\sqrt{8}+\sqrt{3}$

4) $\sqrt{a^2+b^2}$ ... $a+b$ ($a \in \mathbb{R}_0^+, b \in \mathbb{R}_0^+$)

Pour ce faire, tu peux t'aider d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont a et b pour mesure et t'inspirer de l'inégalité triangulaire●.



5) $\sqrt{a^2+0}$ ... $a+0$ ou $\sqrt{0+b^2}$ ... $0+b$ ($a \in \mathbb{R}_0^+, b \in \mathbb{R}_0^+$)

D'où si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors on a $\sqrt{a^2+b^2}$ ... $a+b$.

6) Pour a et b des nombres réels non nuls, quels sont les relations d'égalité $(=)$, de non égalité$(\neq)$, et d'ordre $(<, \leq)$ que l'on peut éventuellement établir entre

$$\sqrt{a^2+b^2},\quad a+b,\quad \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2},\quad |a|+|b|$$

Exercice 11

Garam. Un type de Sudoku qui nous vient de France, tiré du blog d'Alex Bellos, The Guardian.

GARAM

Fill in the blanks with one digit so that each line and column is a valid equation.
Two-digit numbers are read on two consecutive squares in the direction of the equation.
(Two-digit numbers don't start with 0)