

Cours Euler: Corrigé 16

le 11 janvier 2023

Exercice 1

Pour Solange : $4^2 \cdot 4^4 = (2^2)^2 \cdot (2^2)^4 = 2^4 \cdot 2^8$. Pour Charly : $4^2 \cdot 4^4 = 4^6$ car les exposants s'additionnent et pour Jérôme : $4^2 \cdot 4^4 = 16 \cdot (4^2)^2 = 16 \cdot 16^2 = 16^3$. Dans tous les cas, on tombe sur la valeur $4^2 \cdot 4^4$.

NO196. Dans la première partie on utilise le fait que $a^{n+k} + a^n = a^n(a^k + 1)$, de même pour une soustraction.

Dans la deuxième partie c'est la règle vue en cours $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. Pour un produit de puissances *du même nombre* les exposants s'additionnent.

Pour la division $a^n : a^m = a^{n-m}$, les exposants se soustraient ; et enfin la puissance d'une puissance $(a^n)^m = a^{nm}$. Les exposants se multiplient.

a) $2^2 \cdot 2^5 = 2^7 = 128$

b) $4^4 \cdot 4^2 = 4^6 = 4096$

c) $3^3 + 3^3 = 2 \cdot 3^3 = 54$

d) $10^0 : 10^0 = 1$

e) $10^6 - 10^2 = 999900$

f) $7^3 - 6^3 = 127$

g) $(5^1)^2 = 5^2 = 25$

h) $5^2 \cdot 2^2 = (2 \cdot 5)^2 = 100$

i) $2^7 - 2^3 = 2^3(2^4 - 1) = 8(16 - 1) = 120$

j) $10^6 : 10^2 = 10^4$

k) $(2(2^3))^2 = 2^8 = 256$

l) $2^{(2^3)} = 2^8 = 256$

m) $2^2 + 2^5 = 36$

n) $(10^3)^2 = 10^6$

o) $\frac{10^3}{10^6} = 10^{-3}$

p) $10^3 \cdot 10^2 = 10^5$

q) $\frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

r) $3^3 \cdot 4^2 = 27 \cdot 16 = 432$

Exercice 2

a) est correcte, les exposants s'additionnent, les deux valent donc 3^{10} . Par contre

b) est fausse pour la même raison : $4 + 2 \neq 2 + 5$.

c) est fausse aussi car $3 + 5 \neq 3 \cdot 2$, par contre

d) est vraie. Ensuite

e) est fausse car $6^3 \cdot 6^3 = (6^3)^2$.

f) est fausse car les exposants ne se distribuent pas. De fait $7^3 + 7^4 = 7^3(1 + 7) = 8 \cdot 7^3$

g) est vraie. Par contre pour

h) $9^3 : 9 = 9^2$ et

i) $10000^5 = (10^4)^5 = 10^{20}$ et enfin

j) $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \neq 49$.

Exercice 3

- | | |
|--|------------|
| a) $x = 2$ | h) $f = 3$ |
| b) $x = 1$ | i) $b = 6$ |
| c) $x = 0$ | j) $x = 1$ |
| d) $x = -6$ | k) $k = 2$ |
| e) $x = 2$ | l) $x = 1$ |
| f) $a = 4$ et $y = 2$
$a = 2$ et $y = 4$
$a = 16$ et $y = 1$ | m) $x = 2$ |
| | n) $x = 3$ |
| g) $p = 3$ | o) $x = 1$ |

Exercice 4

Dans cet exercice nous utiliserons la proposition sur les propriétés des fractions. Par exemple nous écrivons 3. pour faire référence à la troisième propriété dans cette proposition.

- Pour montrer que toute puissance paire d'un nombre réel est positive, nous utiliserons sans preuve le fait suivant : Le carré de n'importe quel nombre réel est positif.
Maintenant, considérons x^{2n} pour un nombre réel x et un nombre entier n . Si $n = 0$, alors par la définition de la puissance, $x^{2n} = x^0 = 1 \geq 0$. Si $n \neq 0$, alors en utilisant la propriété (vi) des puissances entières, on a que

$$x^{2n} = x^{n+n} \stackrel{(vi)}{=} x^n \cdot x^n = (x^n)^2.$$

Ainsi, x^{2n} est un carré d'un nombre réel et donc positif.

- Soit a un nombre entier et x un nombre réel non nul. Pour montrer que $(\frac{1}{x})^a$ est l'inverse de x^a il suffit de multiplier l'un par l'autre et prouver que le résultat donne 1, Calculons donc en utilisant la propriété 1, i.e., la puissance d'un produit est le produit des puissances :

$$\left(\frac{1}{x}\right)^a \cdot x^a = \left(\frac{1}{x} \cdot x\right)^a = 1^a = 1$$

puisque $1/x$ est l'inverse de x et que la puissance a -ème de 1 vaut 1.

- On a $(x^a)^b = x^{a \cdot b} = x^{b \cdot a} = (x^b)^a$ par la propriété 4. des puissances et la commutativité de la multiplication pour l'égalité centrale.
- On calcule :

$$\begin{aligned} (x - y)^3 &= (x - y)(x - y)^2 = x(x - y)^2 - y(x - y)^2 && \text{distribution de } \cdot \text{ sur } + \text{ et } - \text{ dans } \mathbb{R} \\ &= x(x^2 - 2xy + y^2) - y(x^2 - 2xy + y^2) && \text{identité remarquable} \\ &= x^3 - 2x^2y + xy^2 - (yx^2 - 2xy^2 + y^3) && \text{par distributivité} \\ &= x^3 - 2x^2y + xy^2 - yx^2 + 2xy^2 - y^3 && \text{l'opposé se distribue sur toute la parenthèse} \\ &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 && \text{commutativité de } \cdot \text{ et commutativité de } + \end{aligned}$$

Exercice 5**Partie A.**

(a) $\sqrt{60} = \sqrt{4 \cdot 15} = \sqrt{15}\sqrt{4} = 2\sqrt{15} = \sqrt{4}\sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{12}\sqrt{5}$

Mais $3\sqrt{20} = 6\sqrt{5}$ est différent des autres expressions.

(b) $\sqrt{27} = \sqrt{20+7} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3} = \sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}$

Mais $3\sqrt{9} = 9$ est différent des autres expressions.

(c) $\sqrt{441} = \sqrt{49}\sqrt{9} = 7\sqrt{9} = \sqrt{21}\sqrt{3}\sqrt{7} = \sqrt{400} + \sqrt{1} = 20 + 1 = 21$

Toutes les expressions sont égales.

(d) $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{1}{8}\sqrt{25} = \frac{5}{8} = \frac{5}{\sqrt{64}}$

Mais $\frac{2,5}{6,4} = \frac{5}{12,8}$ est différent des autres expressions.**Partie B.**

a) $\sqrt{175} = \sqrt{5 \cdot 35} = 5\sqrt{7}$

b) $\sqrt{300} = \sqrt{3 \cdot 10^2} = 10\sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{1080} = \sqrt[3]{9 \cdot 120} = \sqrt[3]{27 \cdot 40} = 3\sqrt[3]{8 \cdot 5} = 6\sqrt[3]{5}$

d) $5\sqrt{252} = 5\sqrt{2 \cdot 126} = 5\sqrt{4 \cdot 63} = 10\sqrt{9 \cdot 7} = 30\sqrt{7}$

e) $\sqrt{18} + \sqrt{32} = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

f) $\sqrt{50}\sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{25 \cdot 2 \cdot 4} = 20\sqrt{2}$

g) $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

Partie C.

(a) $\sqrt{900} = 30$

(b) $\sqrt{0,04} = 0,2$

(c) $\sqrt[3]{1000000} = 100$

(d) $\sqrt{10^6} = 1000 = 10^3$

(e) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

(f) $\sqrt{0,25} = 0,5$

(g) $\sqrt[3]{-1} = -1$

(h) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{800} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{100} = 40$

(i) $\sqrt{17^2} = 17$

(j) $\sqrt{1521} = \sqrt{9 \cdot 169} = 3 \cdot 13 = 39$

(k) $\sqrt{81} + \sqrt{121} = 9 + 11 = 20$

(l) $\sqrt{12} : \sqrt{3} = \sqrt{4} = 2$

Exercice 6

Les nombres a et b étant réels, énonce les conditions d'existence des expressions suivantes. Par exemple l'expression $\sqrt{-a}$ existe si $a \leq 0$.

1. \sqrt{ab} existe si a et b sont de même signe (y compris si l'un des deux est nul).2. $\sqrt{-ab}$ existe si a et b sont de signes différents (ou si l'un des deux est nul).3. $\sqrt{-a^3b^3}$ existe si a et b sont de signes différents (ou si l'un des deux est nul).4. $\sqrt{\frac{a}{b}}$ existe si b est non nul et si a et b sont de même signe.5. $\sqrt{\frac{a^3}{b^2}}$ existe si a est positif et b est non nul.6. $\frac{\sqrt{ab}}{b}$ existe si b est non nul et si a et b sont de même signe.

7. $\sqrt{\frac{-a^2}{b}}$ existe si $b < 0$ ou si $b > 0$ et $a = 0$.

8. $\sqrt{-a^2b}$ existe si b est négatif ou si l'un des deux nombres a ou b est nul.

Exercice 7

Le nombre 10^{2017} a exactement 2018 chiffres, il commence par 1 et est suivi de 2017 zéros. Lorsqu'on soustrait 1 on obtient un nombre a 2017 chiffres constitué de 9 uniquement. Soustrayons encore 2016 on trouve un nombre qui a toujours 2017 chiffres, seuls les 4 derniers chiffres ont été modifiés et sont maintenant $9999 - 2016 = 7983$. Par conséquent la somme des chiffres du nombre cherché vaut

$$2013 \cdot 9 + 7 + 9 + 8 + 3 = 18'144$$

Exercice 8

9.

1) $\sqrt{a^2bc^3} = \sqrt{a^2c^2bc} = \sqrt{a^2c^2}\sqrt{bc} = \sqrt{(ac)^2}\sqrt{bc} = ac\sqrt{bc}$ car $ac > 0$.

2) $\sqrt{\frac{a^5}{b^2}c^3} = \sqrt{\frac{a^4}{b^2}ac^2c} = \sqrt{\frac{a^4}{b^2}c^2}\sqrt{ac} = \sqrt{(\frac{a^2}{b}c)^2}\sqrt{ac} = \frac{a^2c}{b}\sqrt{ac}$ car $\frac{a^2c}{b} > 0$.

3) $\sqrt{a^3b^3c^4} = \sqrt{a^2b^2c^4ab} = \sqrt{a^2b^2c^4}\sqrt{ab} = abc^2\sqrt{ab}$.

4) $\sqrt{a^2\frac{a^3b^4}{b^3}c^2} = \sqrt{a^5bc^2} = \sqrt{a^4c^2ab} = a^2c\sqrt{ab}$.

10.

1) $\sqrt{a^4b^2}$ existe toujours.

$$\sqrt{a^4b^2} = \sqrt{a^4}\sqrt{b^2} = \sqrt{(a^2)^2}\sqrt{b^2} = (\sqrt{a^2})^2\sqrt{b^2} = a^2|b|$$

2) $\sqrt{a^7b^3}$ existe si a et b sont tous les deux positifs, tous les deux négatifs (ou si l'un des deux est nul).

$$\sqrt{a^7b^3} = \sqrt{a^6b^2}\sqrt{ab} = |b|\sqrt{(a^2)^3}\sqrt{ab} = |b|(\sqrt{a^2})^3\sqrt{ab} = |a|^3|b|\sqrt{ab} = |a^3b|\sqrt{ab}$$

3) $\sqrt{\frac{a^3}{b^4}}$ existe si a est positif et b non nul.

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^4}} = \sqrt{\frac{a^2}{b^4}a} = \frac{a}{b^2}\sqrt{a}$$

Noter qu'ici on a bien $\sqrt{a^2} = a$ car l'expression donnée existe seulement si a est positif.

4) $\sqrt{a^3b^4}$ existe si a est positif ou si l'un des deux nombres a ou b est nul.

$$\sqrt{a^3b^4} = \sqrt{a^2b^4}\sqrt{a} = ab^2\sqrt{a}$$
 car ab^2 est positif.

Exercice 9

1) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

3) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{12}{2}} = \sqrt{6}$

4) $\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

5) $\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(5-\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}-2}{2}$

6) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2}-1;$

7) $\frac{19\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{19\sqrt{5}(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \frac{19\sqrt{5}(2-\sqrt{5})}{4-5} = \frac{19 \cdot (2\sqrt{5}-5)}{-1} = 95-38\sqrt{5}.$

Exercice 10

1. $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $4+3 = 7$ donc $\sqrt{16+9} < 4+3$
2. Pour comparer les deux expressions, mettons-les au carré : $(\sqrt{25+5})^2 = (\sqrt{30})^2 = 30$
 $(5+\sqrt{5})^2 = 25 + 10\sqrt{5} + 5 = 30 + 10\sqrt{5} > 30$
Donc $\sqrt{25+5} < 5+\sqrt{5}$
3. Pour comparer les deux expressions, mettons-les au carré : $(\sqrt{8+3})^2 = 11$
 $(\sqrt{8}+\sqrt{3})^2 = 8+3+2\sqrt{8\cdot 3} = 11+4\sqrt{6} > 11$
Donc $\sqrt{8+3} < \sqrt{8}+\sqrt{3}$
4. $\sqrt{a^2+b^2}$ est la longueur de l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont de longueur a et b . Puisque cette hypothénuse est de longueur inférieure à $a+b$, alors $\sqrt{a^2+b^2} < a+b$.
5. $\sqrt{a^2+0} = a+0$ et $\sqrt{b^2+0} = b+0$.
Pour comparer $\sqrt{a^2+b^2}$ avec $|a|+|b|$, on élève au carré :
 $(\sqrt{a^2+b^2})^2 = a^2+b^2$ et $(|a|+|b|)^2 = a^2+b^2+2|a||b| \geq a^2+b^2$. Donc $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|$.
Mais nous ne pouvons pas comparer $\sqrt{a^2+b^2}$ avec $a+b$ lorsque a et b sont des réels (donc pas forcément positifs). Par exemple, avec $a = -1$ et $b = 1$: $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} > a+b = 0$ et avec $a = b = 1$: $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} < a+b = 2$.
6. Comme nous l'avons vu avant : $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|$. De plus $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2} = |a|+|b|$, $a+b \leq |a|+|b|$.

Exercice 11

Garam.

GARAM (solutions)

Fill in the blanks with one digit so that each line and column is a valid equation.
Two-digit numbers are read on two consecutive squares in the direction of the equation.
(Two-digit numbers don't start with 0)

$3 \times 2 = 6$	$2 + 3 = 5$
$\begin{array}{r} + \\ 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \\ 8 \end{array}$
$\begin{array}{r} = \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} = \\ 1 \end{array}$
$2 \times 2 = 4$	$4 - 4 = 0$
$\begin{array}{r} + \\ 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \\ 1 \end{array}$
Easy (Tutorial)	

$6 - 2 = 4$	$5 + 1 = 6$
$\begin{array}{r} \times \\ 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \\ 8 \end{array}$
$\begin{array}{r} = \\ 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} = \\ 4 \end{array}$
$4 - 2 = 2$	$5 + 3 = 8$
$\begin{array}{r} + \\ 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} + \\ 2 \end{array}$
Medium	

$2 + 7 = 9$	$3 + 4 = 7$
$\begin{array}{r} + \\ 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \\ 9 \end{array}$
$\begin{array}{r} = \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} = \\ 2 \end{array}$
$1 + 7 = 8$	$4 \times 4 = 8$
$\begin{array}{r} - \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \\ 1 \end{array}$

$3 + 6 = 9$	$7 - 5 = 2$
$\begin{array}{r} \times \\ 7 \end{array}$	$\begin{array}{r} + \\ 3 \end{array}$
$\begin{array}{r} = \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} = \\ 1 \end{array}$
$1 + 4 = 5$	$0 + 8 = 8$
$\begin{array}{r} - \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \\ 9 \end{array}$

$8 \times 1 = 8$	$3 \times 3 = 9$
$\begin{array}{r} + \\ 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \\ 5 \end{array}$
$\begin{array}{r} = \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} = \\ 1 \end{array}$
$1 - 1 = 0$	$1 \times 1 = 1$
$\begin{array}{r} + \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} + \\ 3 \end{array}$
Advanced	

$6 + 3 = 9$	$2 \times 1 = 2$
$\begin{array}{r} \times \\ 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \\ 3 \end{array}$
$\begin{array}{r} = \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} = \\ 1 \end{array}$
$4 + 3 = 7$	$6 + 2 = 8$
$\begin{array}{r} + \\ 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \\ 1 \end{array}$
Hard	

$2 \times 3 = 6$	$6 - 4 = 2$
$\begin{array}{r} + \\ 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \\ 2 \end{array}$
$\begin{array}{r} = \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} = \\ 4 \end{array}$
$1 + 1 = 2$	$8 + 0 = 8$
$\begin{array}{r} + \\ 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \\ 9 \end{array}$

$3 + 6 = 9$	$3 \times 2 = 6$
$\begin{array}{r} \times \\ 7 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \\ 3 \end{array}$
$\begin{array}{r} = \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} = \\ 2 \end{array}$
$1 + 6 = 7$	$7 - 1 = 6$
$\begin{array}{r} \times \\ 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \\ 6 \end{array}$