III. Espaces vectoriels

p premier !

Nous savons donc ce qu'est un corps, et nous en avons une bonne brochette à disposition en cas de besoin : non seulement $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, mais aussi les corps $\mathbb{F}_p$ de p éléments. Nous allons maintenant développer la théorie des espaces vectoriels sur un corps K, c'est-à-dire des droites, plans, espaces, hyper-espaces construits sur K, où l'on peut additionner les "vecteurs" entre eux et les multiplier par des scalaires de K, tout comme vous l'avez fait pour les classes d'équivalence de flèches dans le plan et l'espace (réel).

1 Définition et propriétés élémentaires

Soit K un corps. On note 0_K le zéro (élément neutre additif) et 1_K l'unité (élément neutre multiplicatif) de K. Ce corps est souvent appelé le *corps de base* des K-espaces vectoriels que nous sommes sur le point de définir.

Définition 1.1. Un *espace vectoriel* V sur K est un groupe abélien $(V, +)$, noté additivement, muni d'une *action* de K, c'est-à-dire une application $K \times V \to V$ notée multiplicativement $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, de sorte que :

a) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu) \cdot v \quad , \forall \lambda, \mu \in K \ , \ \forall v \in V$ "associativité"

b) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$ et $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \quad \forall \lambda, \mu \in K \ , \ \forall v, w \in V$ "distributivité"

c) $1_K \cdot v = v \quad \forall v \in V$

On appelle *vecteurs* les éléments de V et *scalaires* les éléments de K.

Voici quelques propriétés élémentaires, valides dans tous les espaces vectoriels.

Lemme 1.2. *Soient* $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ *et* $v, v_1, \ldots, v_m \in V$. *Alors :*

a) $0_K \cdot v = 0_V = \lambda \cdot 0_V$;

b) $(-\lambda)v = -\lambda v = \lambda(-v)$;

c) $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} v_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i v_j\right)$.

Démonstration. a) On écrit $0_K = 0_K + 0_K$ et on conclut comme la semaine passée.

b) On calcule par exemple $(-\lambda)v + \lambda v = (-\lambda + \lambda)v = 0_K \cdot v = 0_V$, si bien que $(-\lambda)v = -\lambda v$.

c) Suit de la distributivité (par récurrence).

□

Commençons par les exemples évidents.

Exemple 1.3. Tout ensemble réduit à un unique élément est un espace vectoriel sur tout corps K. On note alors 0 cet élément et on définit ainsi l'espace vectoriel nul $= \{0_V\}$

Exemple 1.4. Le corps K lui-même est toujours un espace vectoriel sur K. L'action est alors simplement la multiplication de K.

Exemple 1.5. Si V et W sont deux K-espaces vectoriels, on munit $V \times W$ de la structure d'espace vectoriel *produit*. La somme est $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$ et l'action est définie par $\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$. Ainsi le plan réel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Les éléments sont des paires de nombres réels $(a ; b)$, qu'on peut identifier avec le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, classes d'équivalence de flèches reliant le point (x, y) au point $(x+a ; y+b)$.

Exemple 1.6. Soit X un ensemble et $\mathcal{F}(X, K)$ l'ensemble de toutes les applications $f : X \to K$. On définit l'addition "point par point" en posant $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in X$

et l'action en posant $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $\forall \lambda \in K$, $\forall x \in X$

On vérifie facilement qu'il s'agit d'un espace vectoriel sur K.

$X = \{x ; y\} \Rightarrow$ Chaque élément $(a ; b)$ de $K \times K$ est associé à $f : X \to K$ telle que $f(x) = a$ et $f(y) = b$

$$\Rightarrow (a ; b) = (\underbrace{f(x)}_{\in K} ; \underbrace{f(y)}_{\in K})$$

Lorsque X est un ensemble de deux éléments x et y, alors $\mathcal{F}(X, K)$ s'identifie à $K \times K$ puisqu'une application est complètement déterminée par la donnée de deux éléments $f(x)$ et $f(y)$ de K. En revanche, lorsque X est un ensemble infini, cet espace vectoriel devient très grand ! Par exemple, lorsque $X = \mathbb{N}$, les applications $f : \mathbb{N} \to K$ sont toutes les suites dans K. Lorsque X est encore plus grand, comme $\mathbb{R}$, on obtient en particulier l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de toutes les fonctions réelles, continues ou non !

2 Les sous-espaces vectoriels

Tout comme les groupes contiennent des sous-groupes et les anneaux contiennent des sous-anneaux, les espaces vectoriels contiennent des sous-espaces vectoriels. Tout juste après la définition, nous verrons un critère qui permet de les reconnaître.

Définition 2.1. Soit V un K-espace vectoriel. Un sous-ensemble non-vide $W \subset V$ est un *sous-espace (vectoriel)* de V si l'addition et l'action de V se restreignent à W et le munissent d'une structure de K-espace vectoriel.

↳ loi interne à W

Exemple 2.2. Considérons $\mathbb{R}^3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des triples (a, b, c) de nombres réels. Soit W le sous-ensemble $\{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}$.

W est un SEV (sous-espace vectoriel) de $\mathbb{R}^3$ car

- $(0 ; 0 ; 0) \in W$ (car $0 + 0 + 0 = 0$)
- la somme de deux éléments de W reste dans W :
  (a, b, c) et $(a', b', c') \in W \Rightarrow (a + a', b + b', c + c') \in W$ car
  $a + a' + b + b' + c + c' = (a + b + c) + (a' + b' + c') = 0 + 0 = 0$ ✓
- tout multiple de W reste dans W :
  $(a, b, c) \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \in W$ car
  $\lambda a + \lambda b + \lambda c = \lambda (a + b + c) = \lambda \cdot 0 = 0$

$(W ; +)$ est un groupe abélien car $(\mathbb{R}^3 ; +)$ l'est.

Ainsi, tous les axiomes d'un EV sont vérifiés pour W.

Cet exemple indique qu'il y a en général peu d'éléments à vérifier pour voir si un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel.

Proposition 2.3. *Soit V un K-espace vectoriel et $W \subset V$. Alors W est un sous-espace de V si et seulement si*

a) $0 \in W$;

b) $x + y \in W$ *pour tous* $x, y \in W$;

c) $\lambda x \in W$ *pour tous* $\lambda \in K$ *et* $x \in W$.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Les trois conditions sont clairement nécessaires car W doit être muni d'une somme avec élément neutre et d'une action. Montrons donc qu'elles sont suffisantes. $\Leftarrow$

- $W \neq \emptyset$ car $0 \in W$
- $(W ; +)$ groupe abélien par b) et c) et avec $\lambda = -1$ dans c) (Thm 2.6 I. Groupe)
- Associativité et distributivité vérifiées dans W car Ok dans V.
- $1_K w = w$ $\forall w \in W$ car $W \subset V$.

□

Exemple 2.4. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de toutes les fonctions réelles. Alors les sous-ensembles suivants sont tous des sous-espaces vectoriels réels :

a) Les fonctions constantes

b) Les fonctions rationnelles

c) Les fonctions paires

d) Les fonctions dérivables

etc..

par contre, les fonctions telles que $f(1) = 2$

Les opérations ensemblistes d'intersection et d'union se comportent de manière distincte par rapport à la structure d'espace vectoriel.

Lemme 2.5. *Toute intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

Démonstration. On veut montrer que les trois propriétés de la proposition sont vérifiées.

(i) Si $0 \in W_i$ pour une famille $W_i \subset V$ de sous-espaces, alors $0 \in \bigcap W_i$.

(ii) Si $x, y \in \bigcap W_i$, alors $x, y \in W_i$ pour tout i. Comme tous les W_i sont des sous-espaces vectoriels, on a que $x + y \in W_i$ pour tout i, donc $x + y \in \bigcap W_i$.

(iii) Si $x \in \bigcap W_i$ et $\lambda \in K \Rightarrow x \in W_i$ pour tout $i \Rightarrow \lambda x \in W_i$ pour tout $i \Rightarrow \lambda x \in \bigcap W_i$.

□

$\mathbb{F}_2 = \{0;1\}$ $\quad (\mathbb{F}_2)^2 = \{(0;0);(0;1);(1;0);(1;1)\}$

En revanche, la réunion de deux sous-espaces n'est pas un sous-espace en général. Dans $(\mathbb{F}_2)^2$, les sous-ensembles $W_1 = \{(0,0),(0,1)\}$ et $W_2 = \{(0,0),(1,0)\}$ sont des sous-espaces, mais pas la réunion puisque $\underbrace{(0;1)}_{\in W_1} + \underbrace{(1;0)}_{\in W_2} = (1;1) \notin W_1 \cup W_2$

Il vaut mieux travailler avec la *somme* $W_1 + W_2 = \{x + y \,|\, x \in W_1, y \in W_2\}$.
Si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, on dit que la somme $W_1 + W_2$ est *directe* et on note alors $W_1 \oplus W_2$.

Lemme 2.6. *Soit V un K-espace vectoriel. La somme de sous-espaces vectoriels de V est un sous-espace vectoriel de V.*

3 Combinaisons linéaires

Vous avez déjà aperçu l'importance des combinaisons linéaires l'année passée lorsque vous avez brièvement parlé des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Nous travaillons dans cette section avec un K-espace vectoriel V.

Définition 3.1. Soit $S \subset V$. On note $< S >$ l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de V qui contiennent S. On appelle S un *système de générateurs* de $< S >$ et on dit que S *engendre* $< S >$. Lorsque $S = \{x\}$, on note aussi $Kx =< \{x\} >$.

l'espace engendré par les éléments de S.

Le sous-espace $< S >$ est le plus petit sous-espace de V qui contient S. Explicitement, les éléments de $< S >$ sont des combinaisons linéaires d'éléments de S.

Définition 3.2. Soit $S \subset V$. On dit que $x \in V$ est une *combinaison linéaire* d'éléments de S s'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ et des vecteurs $x_1, \ldots, x_n \in S$ tels que $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.

Proposition 3.3. *Soit $S \subset V$. Alors $< S >$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de S.*

Démonstration. Appelons W l'ensemble de toutes ces combinaisons linéaires. des éléments de S

On doit montrer que $W = \langle S \rangle$.

$\underline{\langle S \rangle \subset W}$: W est un SEV de V car $0 \in W$, la somme de deux combinaisons linéaires est une combinaison linéaire et tout multiple d'une comb. lin est une comb. lin. ✓

$\underline{W \subset \langle S \rangle}$ Soit U un SEV de V tel que $S \subset U$.

Puisque $x_1, \ldots x_n \in S$, les produits $\lambda_i x_i \in U$ car U est un SEV (Prop. 2.3, c)) et $\sum \lambda_i x_i \in U$ (prop 2.3 b)) $\Rightarrow W \subset U$ $\forall$ SEV $U \supset S$

$\Rightarrow W \subset \langle S \rangle$ ✓

On a la double inclusion. Donc $\langle S \rangle = W$. □

⚠ aux notations $< \ >$; $\cup$; $+$ SEV de V $W_1 \cup W_2$ pas forcément SEV

Remarque 3.4. Soient W_1, W_2 des sous-espaces de V. Alors $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$.

Définition 3.5. Soient $x_1, \dots, x_n \in V$. On dit que ces vecteurs sont *linéairement indépendants* ou *libres* si l'unique suite de scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tels que

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

est donnée par $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Si ce n'est pas le cas, on dit qu'ils sont *linéairement dépendants* ou *liés*.

Aucun vecteur d'une suite libre ne peut être nul, car, si $x_1 = 0$, alors

$1_K 0_V + 0_K x_2 + \dots + 0_K x_n = 0$

Par contre, l'ensemble vide (par convention,) est libre et tout ensemble contenant un unique élément non nul est libre.

Exemple 3.6. Dans $\mathbb{C}^2$, les éléments $x_1 = (1; i)$ et $x_2 = (1+i; i-1)$ sont linéairement dépendant car $(1+i)x_1 - 1x_2 = (0;0)$

Les éléments $y_1 = (1; i)$ et $y_2 = (i; 1)$ sont libres car si $\alpha y_1 + \beta y_2 = (0;0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta i = 0 & \mid -i \\ \alpha i + \beta = 0 & \mid 1 \end{cases}$ $-\beta i^2 + \beta = 0 \Leftrightarrow 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ et par suite $\alpha = 0$.

4 Bases

Les meilleurs systèmes de générateurs d'un espace vectoriel sont les plus petits. Ceci nous conduit à définir ce qu'est une base d'un K-espace vectoriel V.

Définition 4.1. Une *base* de V est un sous-ensemble ordonné et libre $\mathcal{B} \subset V$ qui engendre V. Si V admet une base finie, on dit que V est de *dimension finie*. On note la base formée des vecteurs $e_1, \dots, e_n$ par $(e_1, \dots, e_n)$ pour rappeler l'ordre des éléments.

Exemple 4.2. Soit $V = K^n$. La *base canonique* de K^n est composée des n vecteurs $e_1 = (1_K; 0_K; \dots; 0_K), e_2 = (0_K; 1_K; 0_K, \dots; 0_K), \dots, e_n = (0_K; \dots; 0_K; 1_K)$. Ces vecteurs sont visiblement linéairement indépendants. Ils engendrent K^n car $(\lambda_1; \dots; \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$.

Le lemme suivant explique comment enlever un vecteur "en trop" d'une famille liée.

Lemme 4.3. de dépendance linéaire.
Si $x_1, \dots, x_m$ sont linéairement dépendants et $x_1 \neq 0_V$, il existe $2 \leq j \leq m$ tel que ~~$x_j \in <$~~ $x_j \in \langle x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m \rangle$ *et les vecteurs $\underbrace{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m}_{\text{on a retiré } x_j}$ engendrent $< x_1, \dots, x_m >$.*

on engendre le même espace.

(*) si $x_1 \neq 0$ et $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_1 x_1 \neq 0$ et il faut le "compenser" plus loin pour que $\sum \lambda_i x_i = 0$.
et si $\lambda_1 = 0$, alors $\exists\, \lambda_j$, $j > 1$ t.q $\lambda_j \neq 0$ (lin dépendant)

Démonstration. Par dépendance linéaire, il existe une combinaison linéaire nulle $\lambda_1 x_1 + \dots \lambda_m x_m = 0_V$ où les λ_i ne sont pas tous nuls. Puisque $x_1 \neq 0_V$, il existe $j \geq 2$ tel que $\lambda_j \neq 0_K$ (*). Choisissons le plus grand j qui vérifie cela. En multipliant par l'inverse de λ_j et en isolant x_j, nous obtenons

$$\sum \lambda_i x_i = 0 \iff \lambda_j x_j = -\sum_{i \neq j} \lambda_i x_i \overset{\lambda_j \neq 0}{\iff} x_j = -\sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} x_i$$

ce qui conclut la preuve de la première assertion. Pour montrer la seconde, il suffit de remarquer que toute combinaison linéaire $\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_m x_m$ peut aussi s'écrire, en remplaçant x_j par l'expression ci-dessus, et il vient

$$\mu_1 x_1 + \dots + \mu_j x_j + \dots + \mu_m x_m = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_j \left(-\sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} x_i \right) + \dots + \mu_m x_m$$

$$= \left(\mu_1 - \mu_j \frac{\lambda_1}{\lambda_j} \right) x_1 + \dots + \left(\mu_{j-1} - \mu_j \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} \right) x_{j-1} + \left(\mu_{j+1} - \mu_j \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \right) x_{j+1} + \dots + \left(\mu_m - \mu_j \frac{\lambda_m}{\lambda_j} \right) x_m$$

□

Le lemme de dépendance linéaire nous permet d'extraire de chaque système de générateurs une base.

Théorème 4.4. *Soit $x_1, \dots, x_m$ un système de générateurs de V. Alors il existe des indices $1 \leq k_1 < \cdots < k_n \leq m$ tels que $(x_{k_1}, \dots, x_{k_n})$ forme une base de V.*

Démonstration. Si les vecteurs sont linéairement indépendants, il n'y a rien à faire, ils forment déjà une base. Si $x_1 = 0_V$, nous éliminons x_1 de la liste. Sinon, nous appliquons le Lemme de dépendance linéaire et éliminons x_j pour l'indice j décrit dans le lemme. Nous continuons ensuite avec ce processus et nous nous arrêtons lorsque les vecteurs restants sont libres. □

Exemple 4.5. Soient $(1;2), (3;6), (4,7)$ et $(5;9)$ des vecteurs de $\mathbb{Q}^2$. Ils sont linéairement dépendants puisque par exemple

$$3(1;2) - (3;6) = (0;0)$$

Par le lemme 4.3, on élimine (par exemple) $(3;6)$.

Les 3 vecteurs restants sont liés car

$$(1;2) + (4;7) - (5;9) = (0;0)$$

$\Rightarrow$ on élimine par exemple $(5;9)$.

Il reste $(1;2)$ et $(4;7)$ qui forment une base de $\mathbb{Q}^2$.

Voyons maintenant que toute partie libre de V peut être complétée en une base.

Théorème 4.6. de la base incomplète.
Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie, $L = \{x_1, \dots, x_k\}$ des vecteurs linéairement indépendants et $S = \{y_1, \dots, y_m\}$ un système de générateurs de V. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ de V telle que $L \subset \mathcal{B} \subset L \cup S$.

Démonstration. Considérons les vecteurs $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m$. C'est un système de générateurs et on peut donc appliquer le théorème précédent pour en extraire une base. Puisque $x_1, \dots, x_k$ est libre, la méthode d'élimination laisse intacte les k premiers vecteurs. □

Dans l'optique de définir la dimension d'un espace vectoriel, nous terminons la journée en montrant qu'il y a toujours moins de vecteurs dans une partie libre que dans un système de générateurs.

Proposition 4.7. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, $L = \{x_1, \dots, x_k\}$ une partie libre et $S = \{y_1, \dots, y_m\}$ un système de générateurs. Alors $k \leq m$.*

Démonstration.
On échange des éléments bien choisis de S avec les éléments de L pour former un système de générateurs $G = \{x_1, \dots x_k, y_{a_1}, \dots y_{a_{m-k}}\}$ en appliquant le lemme 4.3 de dépendance linéaire :
Comme S est un système de générateurs, $\{x_1, y_1, \dots y_k\}$ est lié, et comme $x_1 \neq 0$ (car $x_1 \in L$ qui est libre), par le lemme 4.3, on élimine un des y_j tout en gardant un système de générateurs.
On lui ajoute alors x_2 en début de liste et on recommence jusqu'à obtenir G. En effet, la méthode du lemme laisse intact les premiers vecteurs $x_1, \dots, x_i$ à chaque étape car ils sont libres et qu'on élimine l'élément de plus grand indice j qui est inutile.
On remplace ainsi k vecteurs y_j par les k vecteurs x_i. □
Donc $k \leq m$.