Test 3 - Nombres complexes et algèbre linéaire 19.01.22

Nom: ____________________ Prénom: ____________________

Le test dure 90 minutes. Toutes les réponses doivent être justifiées et rédigées de manière claire.

Exercice 1. *(29 points)*

a) Mettre $\sqrt{2}ie^{i\frac{\pi}{2}}$ sous forme cartésienne ;

b) Mettre $\sqrt{3}+i$ sous forme polaire, puis calculer $(\sqrt{3}+i)^6$ et donner la réponse sous forme cartésienne ;

c) Déterminer z tel que $z^2 = -5+12i$ sous la forme cartésienne.

d) Donner toutes les solutions de l'équation $z^5 = 1+i$ sous la forme polaire.

e) Caractériser géométriquement la similitude d'équation $f(z) = -2iz - 1 + 2i$;

f) Déterminer la représentation graphique de l'équation $z\bar{z} - 2i(z-\bar{z}) - 5 = 0$.

Exercice 2. *(9 points)*

a) Soit $(G, *)$ un groupe. Montrer qu'un sous-ensemble non-vide $H \subset G$ est un sous-groupe si et seulement si $x * y$ et y^{-1} appartiennent à H pour tous $x, y \in H$.

b) Montrer que $U = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, \cdot)$, où $\cdot$ est la multiplication usuelle des nombres complexes.

Exercice 3. *(8 points)*

Soit $E = \{(a; b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+b^2 = 1\}$. On définit l'opération $*$ par $(a; b)*(c; d) = (ac-bd; ad+bc)$.

a) Montrer que $*$ est une loi de composition associative.

b) Déterminer son élément neutre.

c) Est-ce que $(E, *)$ forme un groupe ? Justifier.

Exercice 4. *(4 points)*

On considère l'anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelles.

a) Déterminer un inverse additif $[k]$ de $[2]$ avec $0 \leq k \leq 11$.

b) Déterminer un inverse multiplicatif $[m]$ de $[5]$ avec $0 \leq m \leq 11$.

c) Est-ce que $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ est un corps ? Justifier.

Exercice 5. *(6 points)*

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau.

a) Donner les conditions pour qu'un sous-ensemble $B \subset A$ soit un sous-anneau de A.

b) Montrer que l'ensemble $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 6. *(4 points)*

Soit K un corps et $x, y \in K$. Montrer que si $xy = 0$, alors soit $x = 0$, soit $y = 0$.

Exercice 7. *(4 points)*

Soit $(G; *)$ un groupe avec e comme élément neutre.

a) Si $x, y \in G$, que vaut $(x * y)^{-1}$?

b) Si pour tout $g \in G$, on a $g * g = e$, alors que vaut g^{-1} ?

c) Montrer que si pour tout $g \in G$, on a $g * g = e$, alors G est forcément commutatif.