Exercice 1. Pour calculer le rayon connaissant les longueurs des côtés, on utilise d'abord le théorème du cosinus pour trouver l'angle α en A :

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \cong 36.9°,$$

et donc $r = \dfrac{a}{2\sin(\alpha)} = 20.75$ par le théorème du sinus.

Exercice 2.

a) L'angle manquant se déduit immédiatement, $\gamma = 180-\alpha-\beta = 35°$. Les côtés manquant se calculent à l'aide du théorème du sinus :

$$\frac{\sin(43°)}{10} = \frac{\sin(102°)}{b} = \frac{\sin(35°)}{c},$$

duquel on tire $b = \dfrac{10\sin(102°)}{\sin(43°)} \cong 14.3$ et $c = \dfrac{10\sin(35°)}{\sin(43°)} \cong 8.4$. Grâce au théorème de l'aire, on a que

$$\sigma(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) \cong 41.$$

b) L'angle α peut être obtenu grâce au théorème du cosinus $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos(\alpha)$, duquel on tire

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \cong 20.6.$$

Les angles manquants peuvent se déterminer à nouveau à l'aide du théorème du cosinus,

$$\beta = \arccos\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) \cong 144.11°,$$

et donc $\gamma = 180-\alpha-\beta = 15.3°$. Grâce au théorème de l'aire, on a que

$$\sigma(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) \cong 31.7.$$

c) Grâce au théorème du sinus on a

$$\beta = \arcsin\left(\frac{20\sin(32°)}{13}\right) = 54.6°,$$

ou $\beta = 180-54.6 = 125.4°$ (on a deux solutions car $\sin(\alpha) = \sin(180°-\alpha)$). Les deux solutions sont donc

$$\beta = 54.6,\ \gamma = 180-\alpha-\beta = 93.4°,\ c = \frac{13\sin(93.4°)}{\sin(32°)} \cong 24.$$

5 ou

$$\beta = 125.4,\ \gamma = 180-\alpha-\beta = 22.6°,\ c = \frac{13\sin(22.6°)}{\sin(32°)} \cong 9.4.$$

Grâce au théorème de l'aire, on a que

$$\sigma(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) \cong 129.8,$$

ou

$$\sigma(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) \cong 49.8.$$

d) Par le théorème du sinus,

$$\sin(\gamma) = \frac{19\sin(40°)}{5} \cong 2.44.$$

Cette équation n'a pas de solution car le sinus prend des valeurs entre -1 et 1. On en déduit que le triangle est inconstructible.

e) Grâce au théorème du cosinus on a $a = \pm\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos(\alpha)} \cong \pm 16.8$, comme on peut exclure la solution négative, on en conclut que $a \cong 16.8$. à L'aide du théorème du cosinus, on obtient

$$\beta = \arccos\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) \cong 86.2°,$$

et donc $\gamma = 180 - \alpha - \beta = 36.8°$. Grâce au théorème de l'aire, on calcule

$$\sigma(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) \cong 100.6.$$

Exercice 3. Utilisons le théorème du sinus pour calculer $\sin(\beta) = \dfrac{\sin(\alpha)b}{a} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ si bien que

$$\beta = \frac{\pi}{12} \qquad \text{ou} \qquad \beta = \frac{11\pi}{12}$$

(par un exercice de la série précédente). Si $\beta = \dfrac{11\pi}{12}$, on aurait $\gamma = \pi - \alpha - \beta = -\dfrac{\pi}{12} < 0$ qui n'est pas une valeur admissible dans un triangle. Il ne reste que la solution $\beta = \dfrac{\pi}{12}$ pour laquelle $\gamma = \dfrac{3\pi}{4}$ (car la somme des angles d'un triangle vaut π). Une autre application du théorème du sinus permet alors de calculer $c = \dfrac{a\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$. Grâce au théorème de l'aire, on obtient

$$\sigma(\triangle ABC) = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 4.

a) En élevant la formule de l'aire au carré, on obtient $\sigma^2 = \dfrac{1}{4}a^2b^2\sin^2(\gamma)$ et donc, comme $\sin^2(\gamma) = 1-\cos^2(\gamma)$, on obtient $\sigma = \dfrac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2(\gamma)}$.

b) Par le théorème du cosinus, $\cos(\gamma) = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, et en substituant dans la formule du dessus, on obtient $\sigma = \dfrac{1}{2}ab\sqrt{1-\dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}} = \dfrac{1}{2}ab\sqrt{\dfrac{4a^2b^2-a^4-b^4-c^4-2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{4a^2b^2}}$ $= \dfrac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}$.

c) Développons $\sigma = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ en introduisant $s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$; on obtient

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\left(\frac{1}{2}(a+b+c)-a\right)\left(\frac{1}{2}(a+b+c)-b\right)\left(\frac{1}{2}(a+b+c)-c\right)} \\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b+c-2a}{2}\cdot\frac{a+b+c-2b}{2}\cdot\frac{a+b+c-2c}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on arrive au même résultat qu'au point **b)** et la formule de Héron est démontrée.

d) Par Héron, $\sigma = \sqrt{15(15-10)^3} = 25\sqrt{3}$. La hauteur d'un triangle équilatéral se calcule par Pythagore, $h = \sqrt{10^2-5^2} = 5\sqrt{3}$ et donc l'aire vaut $\dfrac{10\cdot 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$. Les deux résultats sont bien les mêmes.

e) $\sigma = \sqrt{20.5(20.5-12)(20.5-20)(20.5-9)} = \sqrt{20.5\cdot 8.5\cdot 0.5\cdot 11.5} = \sqrt{1001.9375} \cong 31.6$.

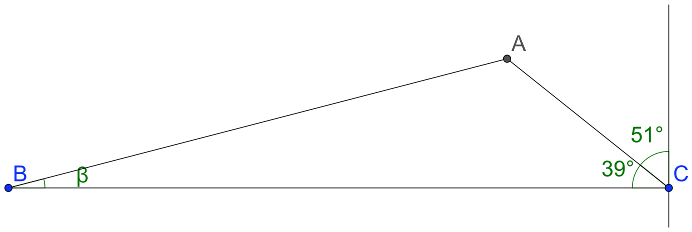
Exercice 5.

a) Faux car si $x = \frac{5\pi}{8}$ alors on a aussi $\sin(2x) = \cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et pourtant $\frac{\pi}{8} \neq \frac{5\pi}{8}$. En fait, l'ensemble des solutions de l'équation $\sin(2x) = \cos(2x)$ est $\left\{\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Vrai, $s = 20$, $s - c = 0$ et donc $\sigma = 0$.

c) Vrai car $\sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x)+\cos(2x)\sin(x) = 2\cos(x)\sin(x)\cos(x)+(2\cos^2 x-1)\cdot\sin(x) = 2\sin(x)\cos^2(x) + (2\cos^2(x) - 1)\cdot\sin(x) = \sin(x)\cdot(4\cos^2 x - 1)$.

Exercice 6. Dans la figure ci-dessous, B représente le bateau, C le banc, A le point de rencontre du bateau et du banc. Les inconnues du problèmes sont l'angle β déterminant le cap du bateau et t le temps en minutes nécessaire au bateau pour intercepter le banc.



Exprimons les distances suivantes en fonction du temps t : $|AB| = \frac{t}{60} \cdot 30 = \frac{t}{2}$, $|AC| = \frac{t}{60} \cdot 12 = \frac{t}{5}$. Appliquons le théorème du cosinus au triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{t^2}{4} = 9 + \frac{t^2}{25} - 2 \cdot 3 \cdot \frac{t}{5} \cdot \cos(39°).$$

En multipliant cette équation par 100 et en arrangeant les termes, on obtient une équation du 2e degré en t :

$$21t^2 + 120\cos(39°) \cdot t - 900 = 0,$$

dont les solutions sont

$$t = \frac{-120\cos(39°) \pm \sqrt{120^2\cos^2(39°) - 4 \cdot 21 \cdot (-900)}}{42} \cong \begin{cases} 4.69 \text{ min} \\ -9.13 \text{ min} \end{cases}.$$

On écarte la solution négative et donc $t = 4.69$ min. Ainsi $|AB| = \frac{4.69}{2} \cong 2.34$ km et $|AC| = \frac{4.69}{5} \cong 0.94$ km. Pour déterminer l'angle β, appliquons le théorème du sinus au triangle $\triangle ABC$:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\gamma)}{c}\right) \cong \arcsin\left(\frac{0.94 \cdot \sin(39°)}{2.34}\right) \cong 14.58°.$$

Donc le cap du bateau doit être N75.42°E (75.42=90-14.58).

Exercice 7. Nous allons calculer $\overline{BC}$, qui est la longueur $\overline{AD}$, puisque dans un rectangle, les côtés opposés sont de même longueur. Pour cela, nous allons déterminer l'angle $\gamma = \widehat{BCE}$, ainsi que $\overline{BE}$, ce qui nous permettra de conclure grâce au théorème du sinus.
Pour trouver γ, appliquons le théorème du sinus au triangle ABE ; pour $\beta = \widehat{ABE}$, et $\varepsilon = \widehat{AEB} = 180-57 = 123°$, nous avons :

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\overline{AE} \cdot \sin(123°)}{\overline{AB}}\right) \cong 34°,$$

(l'autre solution, donnée par $180° - \beta \cong 146°$, est trop grande pour un angle d'un triangle dont on connaît déjà la valeur d'un autre angle de 123°), et donc $\alpha = \widehat{EAB} \cong 180 - 34 - 123 = 23°$. Le théorème du sinus donne encore

$$\overline{BE} = \frac{\sin(23°) \cdot \overline{AB}}{\sin(123°)} \cong 16.8.$$

L'angle $\gamma = \widehat{BCE}$ vaut environ $90 - \alpha = 67°$ (ici, on considère le triangle rectangle ABC). Le théorème du sinus appliqué au triangle BCE donne alors pour $\overline{BC}$:

$$\overline{BC} = \frac{\sin(57°) \cdot \overline{BE}}{\sin(67°)} \cong 15.3 = \overline{AD}.$$

Exercice 8. Nous calculons le pgdc à l'aide de la méthode d'Euclide et le ppmc par la relation suivante :

$$\text{ppmc}(a,b) = \frac{a \cdot b}{\text{pgdc}(a,b)}.$$

a) $$\begin{array}{rcrcl} 3045 & = & 3451 \cdot 0 & + & 3045 \\ 3451 & = & 3045 \cdot 1 & + & 406 \\ 3045 & = & 406 \cdot 7 & + & 203 \\ 406 & = & 203 \cdot 2 & + & 0 \end{array}$$

Le pgdc est 203 et donc le ppmc est égal à $\frac{3045 \cdot 3451}{203} = 51765$.

b) $$\begin{array}{rcrcl} 23387 & = & 1285 \cdot 18 & + & 257 \\ 1285 & = & 257 \cdot 5 & + & 0 \end{array}$$

Le pgdc est 257 et donc le ppmc est égal à $\frac{23387 \cdot 1285}{257} = 116935$.

c) $$\begin{array}{rcrcl} 241 & = & 56 \cdot 4 & + & 17 \\ 56 & = & 17 \cdot 3 & + & 5 \\ 17 & = & 5 \cdot 3 & + & 2 \\ 5 & = & 2 \cdot 2 & + & 1 \\ 2 & = & 1 \cdot 2 & + & 0 \end{array}$$

Le pgdc est 1 et donc le ppmc est égal à $\frac{241 \cdot 56}{1} = 13496$.

d) $$\begin{array}{rcrcl} 10165 & = & 3745 \cdot 2 & + & 2675 \\ 3745 & = & 2675 \cdot 1 & + & 1070 \\ 2675 & = & 1070 \cdot 2 & + & 535 \\ 1070 & = & 535 \cdot 2 & + & 0 \end{array}$$

Le pgdc est 535 et donc le ppmc est égal à $\frac{10165 \cdot 3745}{535} = 71155$.

e) $$\begin{array}{rcrcl} 1313 & = & 481 \cdot 2 & + & 351 \\ 481 & = & 351 \cdot 1 & + & 130 \\ 351 & = & 130 \cdot 2 & + & 91 \\ 130 & = & 91 \cdot 1 & + & 39 \\ 91 & = & 39 \cdot 2 & + & 13 \\ 39 & = & 13 \cdot 3 & + & 0 \end{array}$$

Le pgdc est 13 et donc le ppmc est égal à $\frac{1313 \cdot 481}{13} = 48581$.

Exercice 9.

a) Par l'algorithme d'Euclide, $\text{pgdc}(7375, 472) = 59$, on peut donc diviser le dénominateur et le numérateur par 59 et alors

$$\frac{7375}{472} = \frac{125}{8}.$$

b) Par l'algorithme d'Euclide, $\text{pgdc}(241, 56) = 1$, la fraction est donc irréductible.

c) Par l'algorithme d'Euclide, $\text{pgdc}(4998, 2737) = 119$, on peut donc diviser le dénominateur et le numérateur par 119 et alors

$$\frac{4998}{2737} = \frac{42}{23}.$$

Exercice 10. Cette affirmation est fausse au vu du contre exemple suivant. En effet $\text{pgdc}(2,3) = 1$, $\text{pgdc}(3,8) = 1$ mais $\text{pgdc}(2,8) = 2 \neq 1$.

Exercice 11. Cette affirmation est vraie car si 2 divise $\text{pgdc}(a,b)$ et $\text{pgdc}(b,c)$, cela implique que a, b et c sont pairs car ils sont tous divisibles par 2. Alors, comme a et c sont pairs, leur pgdc sera un multiple de 2.

Exercice 12. Il y a deux possiblités, soit a et p sont premiers entre eux et à ce moment $\text{pgdc}(a,p) = 1$, soit a est un multiple de p et alors $\text{pgdc}(a,p) = p$. Par exemple, si on prend $p = 13$ et a qui n'est pas un multiple de 13, $\text{pgdc}(a,p) = 1$ car 13 n'apparaît pas dans la décomposition en facteur premiers de a. Cependant, si $a = k \cdot 13$ avec $k \in \mathbb{N}$ quelconque alors $\text{pgdc}(a,p) = \text{pgdc}(k \cdot 13, 13) = 13$.

Exercice 13.

a) On peut factoriser $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, ainsi le pgdc est 1 et le ppmc est $6x(x+2)(x-1)$

b) $x^2 - x = x(x-1)$, $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-2)(x-1)$ et $x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^2 - 4x + 3) = x(x-3)(x-1)$, ainsi le pgdc est égal à $x(x-1)$ et le ppmc à $x(x-1)(x-2)(x-3)$.

c) Comme $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ et $x^3 - x^2 + x = x(x^2 - x + 1)$, alors le pgdc des trois polynômes est égal à $x^2 - x + 1$ et le ppmc à $x(x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

Exercice 14.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = x^2(x+1) - 3(x+1) = (x^2 - 3)(x+1) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x+1)$ et $g(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$. Ainsi pgdc$(f(x), g(x)) = x + 1$ et on peut donc simplifier le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ par $x+1$, alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{x + 2}.$$

b) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x - 1)(x + 1)$ et $g(x) = 2x^2 + 3x + 1 = (2x + 1)(x + 1)$, ainsi le pgdc est $x + 1$ et

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - 1}{2x + 1}.$$

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1)$ et $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x^2 + x + 1)$. On trouve ces factorisations en cherchant une racine a des polynômes et en divisant ensuite par $x - a$. Ainsi le pgdc est égal à $x^2 + x + 1$ et donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + 1}{x + 2}.$$

d) Dans ce cas, il est fastidieux (mais possible !) de factoriser les polynômes $f(x)$ et $g(x)$, on va donc appliquer l'algorithme d'Euclide à ces deux polynômes :

$$\begin{array}{rcrcr} x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 8x^2 - x - 21 & = & x(x^4 + 5x^3 + 8x^2 + x - 15) & + & 7(x^2 + 2x - 3) \\ x^4 + 5x^3 + 8x^2 + x - 15 & = & (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 3x + 5) & + & 0 \end{array}$$

Chaque ligne est calculée avec une division euclidienne. Ainsi le pgdc est $x^2 + 2x - 3$ et donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^2 + 2x - 3)(x^3 + 3x^2 + 5x + 7)}{(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 3x + 5)} = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 3x + 5}.$$

e) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 4 = (x-2)(2x^2 - 3x + 2)$ et $g(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$, ainsi le pgdc est $x - 2$ et donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 3}.$$

f) Comme le polynôme $x^2 - x + 1$ est irréductible, on effectue la division euclidienne de $f(x)$ par $g(x)$ et on constate que $f(x)$ n'est pas divisible par $g(x)$, les deux polynômes sont donc premiers entre eux, leur pgdc vaut et un et la fraction et donc irréductible.

Exercice 15.

a) Faux. Si $f(x) = (x+1)(x-1)$ et $g(x) = (x+1)(x-2)$ alors $f(x)$ et $g(x)$ ont le même degré (2) et pourtant leur pgdc est $x + 1$.

b) Vrai. En effet si le pgdc de ces deux polynômes est $x - a$, alors a est une racine de ces deux polynômes (voir proposition 2 du corrigé 2). Ainsi $f(a) = g(a) = 0$ et donc les graphes de $f(x)$ et $g(x)$ se coupent en $(a, 0)$.

c) Vrai. En décomposant $f(x)$ et $g(x)$ en produit de polynômes irréductibles, on obtient $f(x) = p_1(x) \cdots p_n(x)$ et $g(x) = q_1(x) \cdots q_m(x)$. Alors le pgdc sera de le produit de tous les polynômes présents dans les deux déompositions. En élevant ces décompositions au carré, on obtient $f^2(x) = p_1^2(x) \cdots p_n^2(x)$ et $g^2(x) = q_1^2(x) \cdots q_m^2(x)$. Ainsi, le pgdc étant le produit des polynômes apparaissant dans les deux décompositions, ce sera $d^2(x)$.

d) Faux. En prenant $f(x) = 6$ et $g(x) = 9$, on a pgdc$(6, 9) = 3$ mais pgdc$(6 + 1, 9 + 1) = 1$.

Exercice 16. On applique la méthode d'Euclide car la factorisation de ces deux nombres est très difficile !

$$\begin{array}{rcrcr}
37894060279 & = & 18272779829 \cdot 2 & + & 1348500621 \\
18272779829 & = & 1348500621 \cdot 13 & + & 742271756 \\
1348500621 & = & 742271756 \cdot 1 & + & 606228865 \\
742271756 & = & 606228865 \cdot 1 & + & 136042891 \\
606228865 & = & 136042891 \cdot 4 & + & 62057301 \\
136042891 & = & 62057301 \cdot 2 & + & 11928289 \\
62057301 & = & 11928289 \cdot 5 & + & 2415856 \\
11928289 & = & 2415856 \cdot 4 & + & 2264865 \\
2415856 & = & 2264865 \cdot 1 & + & 150991 \\
2264865 & = & 150991 \cdot 15 & + & 0.
\end{array}$$

Ainsi, le pgdc est 150991.